

Probabilités conditionnelles

Prélude - Historique et contexte

En 1654, le chevalier de Méré pose à Blaise Pascal le problème des partis : comment partager la mise d'un jeu interrompu ? La correspondance entre Pascal et Fermat fonde le calcul des probabilités. Au XVIII^e siècle, Thomas Bayes s'intéresse à la façon dont une information modifie une probabilité. Certains résultats surprennent : dans une classe de 23 élèves, il y a plus d'une chance sur deux que deux élèves aient le même anniversaire (paradoxe des anniversaires). En industrie, les probabilités conditionnelles servent au contrôle qualité et à la fiabilité des systèmes.

I Probabilités conditionnelles

Définition

Soient A et B deux événements, $P(A) \neq 0$. La probabilité de B sachant A est :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

On en déduit : $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$.

Exemple

On lance un dé équilibré. A : « le résultat est pair », B : « le résultat est supérieur ou égal à 4 ».

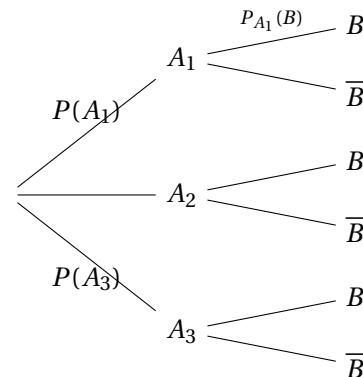
$$P(A \cap B) = P(\{4; 6\}) = \frac{2}{6} \text{ donc } P_A(B) = \frac{2/6}{3/6} = \frac{2}{3}.$$

II Arbres pondérés et probabilités totales

Propriété - Règles

- La somme des probabilités issues d'un nœud vaut 1.
- Les probabilités du second niveau sont des probabilités conditionnelles.
- La probabilité d'un chemin est le produit des probabilités de ses branches.
- **Formule des probabilités totales** : si $A_1, \dots, A_n$ forment une partition de l'univers,

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + \dots + P(A_n \cap B).$$



Exemple

Une chaîne de production utilise trois machines : M_1 (50 % de la production, 1 % de défauts), M_2 (30 %, 2 %) et M_3 (20 %, 4 %). La probabilité qu'une pièce soit défectueuse est

$$P(D) = 0,5 \times 0,01 + 0,3 \times 0,02 + 0,2 \times 0,04 = 0,005 + 0,006 + 0,008 = 0,019.$$

Sachant qu'une pièce est défectueuse, la probabilité qu'elle vienne de M_3 est $P_D(M_3) = \frac{0,008}{0,019} \approx 0,42$.

III Indépendance

Définition

A et B sont **indépendants** si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$, ce qui équivaut (si $P(A) \neq 0$) à $P_A(B) = P(B)$.

Propriété

Si A et B sont indépendants, alors $\overline{A}$ et B le sont aussi, ainsi que A et $\overline{B}$.

Exemple - Fiabilité d'un système

Un système comporte deux composants indépendants C_1 et C_2 qui fonctionnent avec les probabilités respectives 0,95 et 0,9.

- **En série** (le système fonctionne si les deux fonctionnent) : $P = 0,95 \times 0,9 = 0,855$.
- **En parallèle** (le système fonctionne si au moins un fonctionne) : $P = 1 - 0,05 \times 0,1 = 0,995$.

Remarque

Ne pas confondre indépendants et incompatibles : si $A \cap B = \emptyset$ avec $P(A)$ et $P(B)$ non nulles, alors $P(A \cap B) = 0 \neq P(A)P(B)$.

Exemple - Le paradoxe des anniversaires

Dans un groupe de n personnes (anniversaires indépendants et équiprobables sur 365 jours), la probabilité que toutes aient des anniversaires différents est

$$\frac{365}{365} \times \frac{364}{365} \times \dots \times \frac{365 - n + 1}{365}.$$

Pour $n = 23$, elle vaut environ 0,493 : la probabilité qu'au moins deux personnes aient le même anniversaire est donc environ 0,507.