

Suites arithmétiques et géométriques

Prélude - Historique et contexte

On raconte que le jeune Gauss, à 9 ans, calcula en quelques secondes $1 + 2 + \dots + 100 = 5050$ en associant les termes deux à deux : $1 + 100, 2 + 99 \dots$. Les suites modélisent des phénomènes discrets : amortissement d'un matériel, usure d'une batterie, production mensuelle, placement financier. Les suites arithmétiques décrivent des évolutions à pas constant, les suites géométriques des évolutions à pourcentage constant.

I Suites arithmétiques

Définition

(u_n) est **arithmétique** de raison r si pour tout n : $u_{n+1} = u_n + r$.

Propriétés

- Terme général : $u_n = u_0 + nr$ et plus généralement $u_n = u_p + (n - p)r$.
- a, b, c sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique si et seulement si $b - a = c - b$, c'est-à-dire si $b = \frac{a+c}{2}$: b est la **moyenne arithmétique** de a et c .
- Si $r > 0$ la suite est croissante, si $r < 0$ elle est décroissante.
- Somme de termes consécutifs : $S = \sum_{k=0}^n u_k = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}$ soit « nombre de termes $\times \frac{\text{premier} + \text{dernier}}{2}$ ».
- En particulier $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Exemple

Un atelier produit 500 pièces le premier mois, puis 20 pièces de plus chaque mois. $u_n = 500 + 20n$ (mois $n + 1$).

Production du 12^e mois : $u_{11} = 720$. Production totale sur un an : $12 \times \frac{500+720}{2} = 7320$ pièces.

II Suites géométriques

Définition

(u_n) est **géométrique** de raison q si pour tout n : $u_{n+1} = q \times u_n$.

Une hausse de $t\%$ correspond à $q = 1 + \frac{t}{100}$, une baisse de $t\%$ à $q = 1 - \frac{t}{100}$.

Propriétés

- Terme général : $u_n = u_0 \times q^n$ et $u_n = u_p \times q^{n-p}$.
- a, b, c positifs sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique si et seulement si $\frac{b}{a} = \frac{c}{b}$, c'est-à-dire $b = \sqrt{ac}$: b est la **moyenne géométrique** de a et c .
- Pour $u_0 > 0$: si $q > 1$ la suite est croissante, si $0 < q < 1$ elle est décroissante.
- Somme ($q \neq 1$) : $S = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ soit « premier terme $\times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}$ ».

Exemple

La capacité d'une batterie neuve est 60 kWh; elle perd 2 % par an. $u_n = 60 \times 0,98^n$.

Après 10 ans : $u_{10} = 60 \times 0,98^{10} \approx 49,0$ kWh.

Si l'on recharge complètement la batterie une fois par an, l'énergie totale stockée sur 10 recharges (années 0 à 9) est $60 \times \frac{1-0,98^{10}}{1-0,98} \approx 548,8$ kWh.

III Reconnaître le bon modèle

Méthode

	Arithmétique	Géométrie
Évolution	on ajoute la même quantité	on multiplie par le même nombre
Test	différences $u_{n+1} - u_n$ constantes	quotients $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ constants
Représentation	points alignés	points sur une courbe « exponentielle »

Pour la question « à partir de quand...? », on utilise la calculatrice, un algorithme avec une boucle `while`, ou les logarithmes (géométrie).