

Variables aléatoires discrètes finies

Prélude - Historique et utilité

Jacques Bernoulli, dans son *Ars Conjectandi* publié en 1713, étudie la répétition d'une même expérience à deux issues : c'est la naissance de la loi binomiale. Le triangle de Pascal, connu bien avant Pascal par les mathématiciens chinois (Yang Hui, XIII^e siècle) et perses (Al-Karaji), permet de compter les chemins d'un arbre. Aujourd'hui, ces outils servent à contrôler la qualité d'une production, à évaluer la fiabilité d'une transmission de données ou le gain moyen d'un jeu. La planche de Galton, où des billes rebondissent sur des clous, illustre la loi binomiale.

I Variable aléatoire et espérance

Définition

Une **variable aléatoire** X associe un nombre à chaque issue d'une expérience aléatoire. Sa **loi de probabilité** donne les valeurs x_i prises par X et les probabilités $p_i = P(X = x_i)$ correspondantes (avec $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$).

Définition

L'**espérance** de X est :

$$E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n = \sum_{i=1}^n x_i p_i .$$

Elle représente la valeur moyenne prise par X si l'on répète l'expérience un grand nombre de fois.

Exemple

Un jeu coûte 2 €. On lance un dé : si l'on obtient 6 on gagne 8 €, si l'on obtient 5 on gagne 3 €, sinon rien. X est le gain algébrique (gain moins mise).

x_i	-2	1	6
$P(X = x_i)$	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$E(X) = -2 \times \frac{4}{6} + 1 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{6} = \frac{-8+1+6}{6} = -\frac{1}{6} \approx -0,17.$$

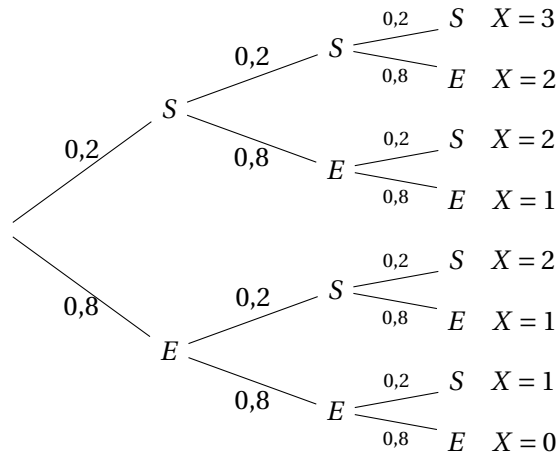
En moyenne, le joueur perd environ 0,17 € par partie : le jeu est défavorable au joueur.

II Schéma de Bernoulli et loi binomiale

Définition

- Une **épreuve de Bernoulli** de paramètre p est une expérience à deux issues : succès (probabilité p) et échec (probabilité $1 - p$).
- Un **schéma de Bernoulli** est la répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et **indépendantes**.
- La variable aléatoire X qui compte le nombre de succès suit la **loi binomiale** de paramètres n et p , notée $\mathcal{B}(n ; p)$.

Un commercial contacte 3 clients; chacun passe commande avec la probabilité 0,2, indépendamment des autres. X = nombre de commandes suit $\mathcal{B}(3; 0,2)$.



L'événement $\{X = k\}$ correspond à tous les chemins comportant exactement k succès.

Propriété - Cas particuliers

Si X suit $\mathcal{B}(n ; p)$:

$$P(X=0)=(1-p)^n \quad P(X=n)=p^n \quad P(X=1)=n \times p \times (1-p)^{n-1} \quad P(X=n-1)=n \times p^{n-1} (1-p).$$

On en déduit par exemple $P(X \geq 1) = 1 - (1 - p)^n$. Dans l'exemple : $P(X = 0) = 0,8^3 = 0,512$; $P(X = 3) = 0,2^3 = 0,008$; $P(X = 1) = 3 \times 0,2 \times 0,8^2 = 0,384$; $P(X \geq 1) = 0,488$.

III Coefficients binomiaux et triangle de Pascal

Définition

Le nombre de chemins réalisant exactement k succès dans un arbre à n épreuves est noté $\binom{n}{k}$ (« k

parmi n »). On a $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.

Propriété - Triangle de Pascal

Chaque coefficient est la somme des deux coefficients situés au-dessus de lui (à gauche et juste au-dessus) :

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

Propriété

Si X suit $\mathcal{B}(n; p)$, pour tout k entre 0 et n :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} \quad \text{et} \quad E(X) = np.$$

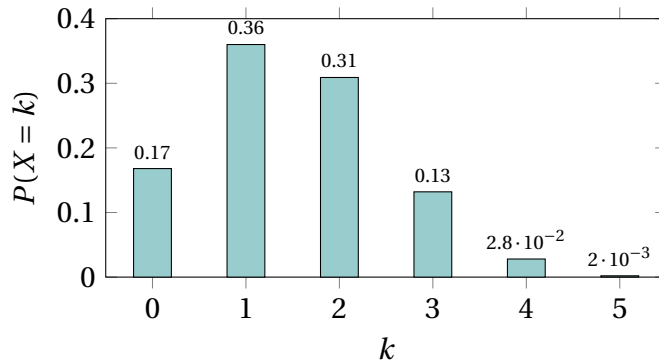
Exemple

Un capteur transmet une donnée avec une erreur dans 30 % des cas ; on envoie 5 données de façon indépendante. Le nombre X d'erreurs suit $\mathcal{B}(5; 0,3)$.

$$P(X = 2) = \binom{5}{2} \times 0,3^2 \times 0,7^3 = 10 \times 0,09 \times 0,343 = 0,3087.$$

$E(X) = 5 \times 0,3 = 1,5$: en moyenne, 1,5 erreur pour 5 envois.

Représentation - Diagramme en bâtons de $\mathcal{B}(5; 0,3)$



L'espérance $E(X) = 1,5$ se situe au « centre » du diagramme. Si l'on simule un grand nombre d'échantillons, l'histogramme des fréquences observées ressemble à ce diagramme.