

Probabilités conditionnelles

Prélude - Historique et utilité

Les probabilités sont nées de questions très concrètes sur les jeux de hasard au XVIème siècle.

La naissance des probabilités est souvent datée à 1654 avec le problème posé par le Chevalier de Méré : comment partager équitablement la mise lorsqu'une partie est interrompue avant son terme? Blaise Pascal et Pierre de Fermat échangent des lettres pour discuter des solutions.

C'au XXème siècle que ce domaine est devenu un langage central pour décrire l'incertitude en sciences, en économie, en médecine et en informatique.

I Exemple fil rouge

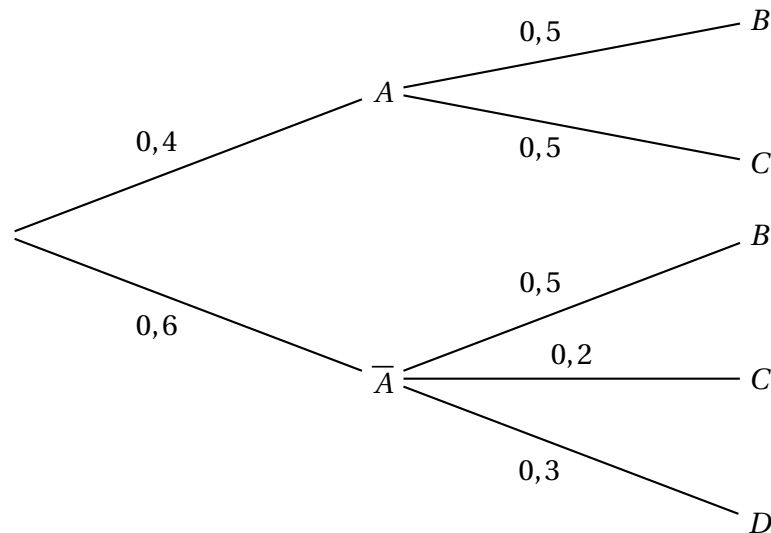
Une entreprise possède trois bureaux à Brest, Calais et Dinan. Certains employés sont autorisés à travailler régulièrement à distance. On note :

A l'événement « l'employé bénéficie d'un accord de télétravail ».

B l'événement « l'employé est à Brest ».

C l'événement « l'employé est à Calais ».

D l'événement « l'employé est à Dinan ».



II Calculs

Propriété

- La somme des probabilités des branches issues d'un même nœud est égale à 1.
- La probabilité d'un chemin est le produit des probabilités des branches qui le composent.
- $P(A) + P(\bar{A}) = 1$
- $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = P(B) \times P_B(A)$
- La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins menant à cet événement. C'est ce qu'on appelle les **probabilités totales**. Plus précisément on a :
 $P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$

Exemple fil rouge

$$P(A) =$$

$$P(A \cap B) =$$

$$P(B) =$$

$$P(A \cap C) =$$

$$P(C) =$$

$$P(A \cap D) =$$

$$P(D) =$$

$$P(B \cap C) =$$

$$P(B \cap D) =$$

$$P(C \cap D) =$$

$$P(A \cup B) =$$

$$P_A(B) =$$

$$P(A \cup C) =$$

$$P_A(C) =$$

$$P(A \cup D) =$$

$$P_A(D) =$$

$$P(B \cup C) =$$

$$P_B(A) =$$

$$P(B \cup D) =$$

$$P_B(C) =$$

$$P(C \cup D) =$$

$$P_B(D) =$$

V Indépendance de deux événements

Définition

Deux événements A et B sont **indépendants** lorsque la réalisation de l'un ne modifie pas la probabilité de l'autre. Ainsi :

$$\begin{aligned} A \text{ et } B \text{ indépendants} &\iff P_A(B) = P(B) \\ &\iff P_B(A) = P(A) \\ &\iff P(A) \times P(B) = P(A \cap B) \end{aligned}$$

Exemple fil rouge

Quels événements sont indépendants parmi A , B , C et D ?