

Suites géométriques

Prélude - Historique et utilité

Les suites géométriques apparaissent déjà sur des tablettes babyloniennes pour calculer des intérêts. Elles modélisent toutes les situations où une grandeur est **multipliée** par le même nombre à chaque étape : placements à intérêts composés, crédits, inflation, croissance d'une population, dépréciation d'un matériel... Elles sont indispensables en gestion et en finance.

I Définition et expression

Exemples

Pour chaque liste, dire si l'on passe d'un terme au suivant en multipliant toujours par le même nombre.

3	6	12	24
100	110	121	133,1
80	40	20	10
2	4	6	8

Définition

Une **suite géométrique** est une suite de nombres qui commence par un terme u_0 et dont chaque terme s'obtient en multipliant le précédent par un même nombre q : **la raison**.

$$u_{n+1} = q \times u_n$$

Méthode - Prouver que trois nombres sont des termes consécutifs

a, b, c (non nuls) sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique si et seulement si $\frac{b}{a} = \frac{c}{b}$.

Exemple : 50 ; 60 ; 72 : $\frac{60}{50} = 1,2$ et $\frac{72}{60} = 1,2$: oui, avec la raison 1,2.

Propriété - Raison et évolution

Une hausse de t % correspond à une raison $q = 1 + \frac{t}{100}$; une baisse de t % correspond à $q = 1 - \frac{t}{100}$.

Exemple : un loyer augmente de 2,5 % par an : $q = 1,025$. Une voiture perd 15 % de sa valeur par an : $q = 0,85$.

Propriété

L'expression du terme de rang n en fonction de n est :

$$u_n = u_0 \times q^n \quad \text{et plus généralement} \quad u_n = u_p \times q^{n-p}.$$

Exemple

Un capital de 1 500 € est placé à 4 % par an. $u_n = 1500 \times 1,04^n$; au bout de 8 ans : $u_8 \approx 2052,85$ €.

Propriété - Sens de variation (pour $u_0 > 0$ et $q > 0$)

Si $q > 1$ la suite est croissante; si $0 < q < 1$ elle est décroissante; si $q = 1$ elle est constante.

II Moyenne géométrique

Définition

La moyenne géométrique de deux nombres positifs a et b vaut : $\boxed{\sqrt{a \times b}}$.

Remarque

Si $a = u_0$ et $b = u_2$ sont deux termes d'une suite géométrique positive, alors $u_1 = \sqrt{u_0 \times u_2}$.

Exemple : entre 20 et 45, la moyenne géométrique est $\sqrt{900} = 30$: 20 ; 30 ; 45 est une suite géométrique de raison 1,5.

III Somme des termes

Propriété

Pour $q \neq 1$, la somme des n premiers termes d'une suite géométrique vaut :

$$S = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} u_k = u_0 \times \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

Autrement dit : premier terme $\times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}$.

Exemple

Un salarié verse 1 200 € la première année sur un plan d'épargne et augmente ses versements de 5 % chaque année. Au total, en 10 ans, il aura versé :

$$S = 1\,200 \times \frac{1 - 1,05^{10}}{1 - 1,05} \approx 15\,093,47 \text{ €}.$$

Remarque

On reconnaît une situation de somme lorsqu'on s'intéresse à un **cumul** (total versé, production totale sur plusieurs années...) et non à la valeur à une date donnée.