

Fonctions exponentielles

Prélude - Historique et utilité

Les suites géométriques ne sont définies que pour des nombres entiers (année 1, année 2...). Mais que vaut un placement au bout de 6 mois, ou de 2,5 ans? Les fonctions exponentielles $x \mapsto a^x$ prolongent les suites géométriques à tous les nombres réels positifs. Elles permettent aussi de calculer un taux moyen équivalent à plusieurs évolutions successives, ce qui est très utilisé en économie (inflation moyenne, croissance annuelle moyenne...).

I Fonctions $x \mapsto a^x$

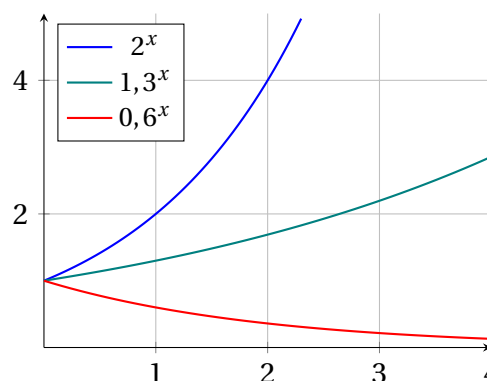
Définition

Soit a un réel strictement positif. La fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = a^x$ est appelée **fonction exponentielle de base a** . Pour tout entier n , $f(n) = a^n$: c'est le prolongement de la suite géométrique (a^n) .

Propriété - Sens de variation

- Si $a > 1$, la fonction $x \mapsto a^x$ est strictement croissante.
- Si $0 < a < 1$, elle est strictement décroissante.
- Si $a = 1$, elle est constante égale à 1.

Pour une fonction $x \mapsto k \times a^x$ avec $k > 0$, le sens de variation est le même; avec $k < 0$, il est inversé.



Propriétés algébriques

Pour $a > 0$, $b > 0$ et x, y réels positifs :

$a^{x+y} = a^x \times a^y$	$a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$	$(a^x)^y = a^{xy}$	$(ab)^x = a^x \times b^x$
----------------------------	-----------------------------	--------------------	---------------------------

En particulier $a^0 = 1$ et $a^{1/n}$ est le nombre positif dont la puissance n -ième vaut a : $a^{1/2} = \sqrt{a}$.

Exemple

Simplifier : $A = \frac{3^{2,5} \times 3^{1,5}}{3^2} = 3^{2,5+1,5-2} = 3^2 = 9$ $B = (4^{0,25})^2 = 4^{0,5} = 2$.

II Application aux évolutions

Exemple

Un capital de 3 000 € est placé à 2 % par an. Au bout de x années, il vaut $C(x) = 3000 \times 1,02^x$.

Au bout de 6 mois : $C(0,5) = 3000 \times 1,02^{0,5} \approx 3029,85$ €. Au bout de 3 ans et 3 mois : $C(3,25) \approx 3199,42$ €.

Propriété - Taux d'évolution moyen

Si une grandeur subit n évolutions successives dont le coefficient multiplicateur global est C , le **taux d'évolution moyen** t_m vérifie $(1 + t_m)^n = C$, donc :

$$t_m = C^{1/n} - 1$$

Exemple

Les prix ont augmenté de 5,2 % en 2022, 4,9 % en 2023 et 2 % en 2024.

$C = 1,052 \times 1,049 \times 1,02 \approx 1,1256$ et $t_m = 1,1256^{1/3} - 1 \approx 0,0402$.

L'inflation moyenne a été d'environ 4,02 % par an sur ces trois années.

Exemple

Un taux annuel de 6 % correspond à un taux mensuel moyen de $1,06^{1/12} - 1 \approx 0,487$ %.

Remarque

Le taux moyen n'est pas la moyenne des taux : deux hausses de 10 % et 30 % donnent $C = 1,43$ et $t_m = \sqrt{1,43} - 1 \approx 19,58$ %, et non 20 %.