

Logarithme décimal

Prélude - Historique et utilité

Au début du XVII^e siècle, l'Écossais John Napier (Neper) invente les logarithmes pour simplifier les calculs des astronomes : ils transforment les multiplications en additions. Henry Briggs crée ensuite les tables de logarithmes décimaux, utilisées jusqu'à l'arrivée des calculatrices. Aujourd'hui, le logarithme décimal sert à résoudre des équations du type $a^x = b$ (« au bout de combien de temps...? ») et à mesurer des grandeurs sur des échelles très étendues : décibels, pH, magnitude des séismes.

I Définition

Définition

Pour tout réel $b > 0$, il existe un unique réel x tel que $10^x = b$. Ce nombre est le **logarithme décimal** de b , noté $\log(b)$.

$$10^x = b \iff x = \log(b) \quad (b > 0)$$

Exemples

$$\log(1) = 0 \quad \log(10) = 1 \quad \log(100) = 2 \quad \log(0,001) = -3 \quad \log(10^n) = n \quad 10^{\log b} = b.$$

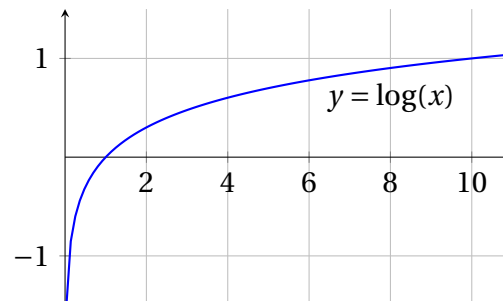
La calculatrice donne $\log(2) \approx 0,301$: cela signifie que $10^{0,301} \approx 2$.

Propriété - Sens de variation

La fonction $\log$ est définie sur $]0 ; +\infty[$ et strictement croissante. Donc, pour $a > 0$ et $b > 0$:

$$a < b \iff \log(a) < \log(b).$$

$\log(x) < 0$ pour $0 < x < 1$ et $\log(x) > 0$ pour $x > 1$.



II Propriétés algébriques

Propriété

Pour tous réels $a > 0$, $b > 0$ et tout réel n :

$\log(ab) = \log a + \log b$	$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b$	$\log\left(\frac{1}{b}\right) = -\log b$	$\log(a^n) = n \log a$
------------------------------	--	--	------------------------

Exemple

$$\log(20) = \log(2 \times 10) = \log 2 + 1 \approx 1,301. \quad \log(8) = \log(2^3) = 3 \log 2 \approx 0,903.$$

$$A = \log(50) + \log(2) = \log(100) = 2. \quad B = \log(3^{10}) - 10 \log(3) = 0.$$

III Résolution d'équations et d'inéquations

Méthode - Équation $a^x = b$ ($a > 0$, $b > 0$)

On applique log aux deux membres : $\log(a^x) = \log(b) \iff x \log(a) = \log(b) \iff x = \frac{\log b}{\log a}$ ($a \neq 1$).

Exemple : $2^x = 1000 \iff x = \frac{\log 1000}{\log 2} = \frac{3}{\log 2} \approx 9,97$.

Méthode - Équation $x^a = b$ ($x > 0$, $b > 0$)

$x^a = b \iff x = b^{1/a}$. Exemple : $x^5 = 243 \iff x = 243^{1/5} = 3$.

Méthode - Inéquation $a^x > b$

La fonction log étant croissante, on peut l'appliquer sans changer le sens de l'inégalité. **Attention** : lorsqu'on divise par $\log(a)$, le sens change si $\log(a) < 0$, c'est-à-dire si $0 < a < 1$.

Exemple : $0,8^x < 0,1 \iff x \log(0,8) < \log(0,1) \iff x > \frac{-1}{\log(0,8)} \approx 10,32$ (car $\log 0,8 < 0$).

Exemple - Problème de seuil

Un capital de 2 000 € est placé à 3 % par an. Au bout de combien d'années dépasse-t-il 3 000 € ?

$$2000 \times 1,03^n > 3000 \iff 1,03^n > 1,5 \iff n \log(1,03) > \log(1,5) \iff n > \frac{\log 1,5}{\log 1,03} \approx 13,72.$$

Il faut 14 années.

Exemple - Le décibel

Le niveau sonore d'un son d'intensité I est $L = 10 \log \left(\frac{I}{I_0} \right)$ décibels. Si l'intensité est multipliée par 2, le niveau augmente de $10 \log 2 \approx 3$ dB.