

Fonction inverse

Prélude - Historique et utilité

La fonction inverse traduit une **proportionnalité inverse** : quand une grandeur double, l'autre est divisée par deux. C'est le cas du temps de parcours en fonction de la vitesse, du prix par personne en fonction du nombre de participants, ou du coût fixe par unité produite. En économie, le coût moyen de production contient souvent un terme en $\frac{1}{x}$ qui diminue lorsque la production augmente. La courbe de la fonction inverse, l'hyperbole, était déjà étudiée par Apollonius de Perge.

I Définition et courbe

Définition

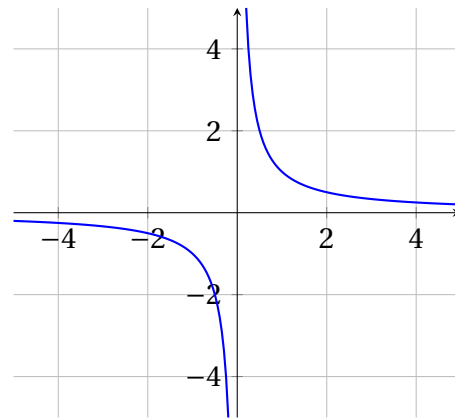
La **fonction inverse** est la fonction f définie sur $\mathbb{R}^* =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.

Le nombre 0 n'a pas d'inverse : f n'est pas définie en 0.

Propriété - Courbe représentative

x	-2	-1	-0,5	0,5	1	2
$\frac{1}{x}$	-0,5	-1	-2	2	1	0,5

La courbe est une **hyperbole**, formée de deux branches symétriques par rapport à l'origine O .



II Dérivée et sens de variation

Propriété

La fonction inverse est dérivable sur $] -\infty ; 0[$ et sur $]0 ; +\infty[$ et $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

Comme $x^2 > 0$, $f'(x) < 0$: la fonction inverse est **strictement décroissante** sur $] -\infty ; 0[$ et sur $]0 ; +\infty[$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	-	-
$f(x)$	0 ↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘ 0	

Remarque

Attention : la fonction inverse n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$ tout entier : $-1 < 1$ et $f(-1) = -1 < f(1) = 1$.

Exemple

$g(x) = 3 + \frac{5}{x}$ sur $]0; +\infty[: g'(x) = -\frac{5}{x^2} < 0$ donc g est décroissante.

III Comportement aux bornes et asymptotes

Propriété - Limites

- Quand x devient très grand (vers $+\infty$) ou très grand en valeur absolue négatif (vers $-\infty$), $\frac{1}{x}$ se rapproche de 0 :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

- Quand x se rapproche de 0 en restant positif, $\frac{1}{x}$ devient très grand; en restant négatif, $\frac{1}{x}$ devient très grand en valeur absolue et négatif :

$$\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} \frac{1}{x} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow 0, x < 0} \frac{1}{x} = -\infty.$$

x	10	100	1 000	0,01	0,0001
$\frac{1}{x}$	0,1	0,01	0,001	100	10 000

Définition - Asymptotes

- L'axe des abscisses (droite $y = 0$) est **asymptote horizontale** à l'hyperbole en $+\infty$ et en $-\infty$: la courbe s'en rapproche autant qu'on veut.
- L'axe des ordonnées (droite $x = 0$) est **asymptote verticale** à l'hyperbole.

Exemple - Coût moyen

Une entreprise a des coûts fixes de 1 200 € et un coût variable de 4 € par objet. Le coût moyen pour x objets est $C_M(x) = 4 + \frac{1200}{x}$ ($x > 0$).

C_M est décroissante et, quand x devient très grand, $\frac{1200}{x}$ tend vers 0 : le coût moyen se rapproche de 4 €. La droite $y = 4$ est asymptote horizontale à la courbe de C_M .