

DS de Mathématiques

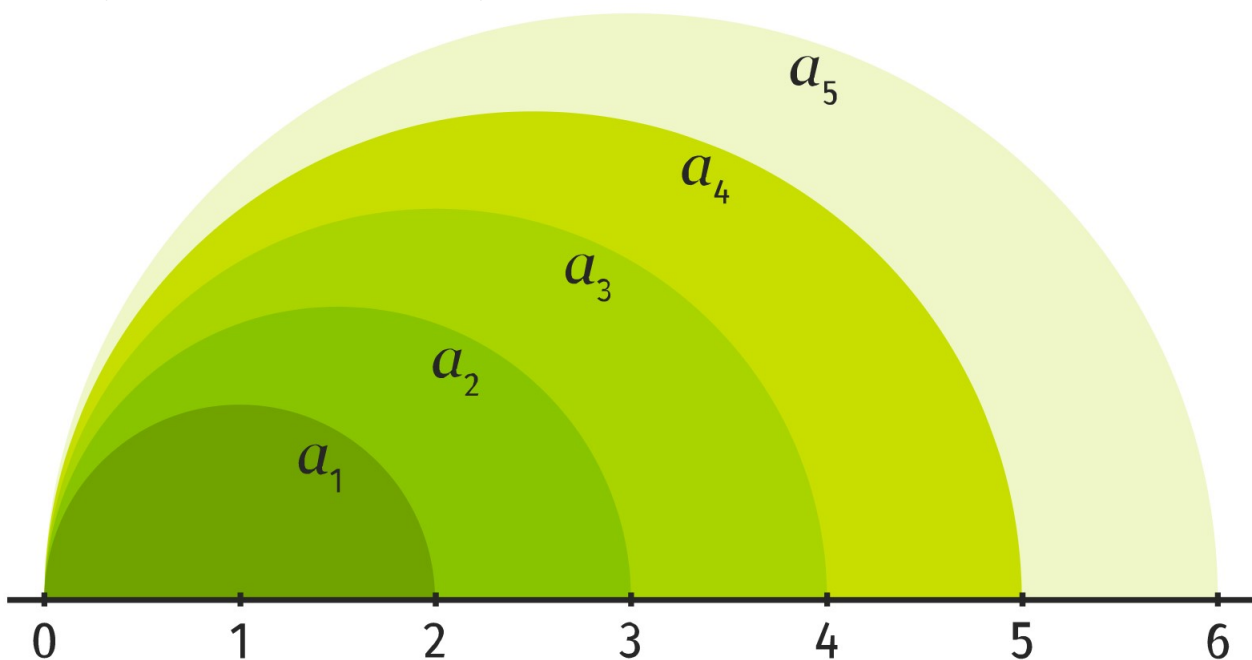
Durée 1 heure.

Tout au long du devoir rédiger précisément en justifiant à chaque fois.

Exercice 1	Barème	Exercice 2	Barème	Exercice 3	Barème	Communiquer
1.	/1	1.	/1	1.	/1.5	/2
2.	/1	2.	/4	2.	/1.5	
3.	/1	3.	/1	3.	/1	
4.	/2			4.	/2	
5.	/1					

Exercice 1.

On construit des demi-disques comme sur la figure ci-dessous. L'unité est le centimètre. On appelle a_n la longueur du demi-cercle de rang $n \geq 1$.



Pour rappel la longueur du périmètre d'un cercle est de $2 \times \pi \times \text{rayon}$

- Calculer les valeurs de a_1 , a_2 et a_3 .

$$a_1 = \frac{2\pi \times 1}{2} = \pi$$

$$a_2 = \frac{2\pi \times 1,5}{2} = 1,5\pi$$

$$a_3 = \frac{2\pi \times 2}{2} = 2\pi$$

- Prouver que (a_n) est une suite arithmétique et déterminer sa raison.

À chaque étape le diamètre du cercle augmente de 1, son rayon augmente donc de 0,5 et la longueur du demi cercle de $0,5\pi$. Cet ajout régulier à chaque étape montre que c'est une suite arithmétique de raison $0,5\pi$.

- Exprimer a_n en fonction de n .

A_n étant une suite arithmétique on a deux solutions :

En gardant a_1 : $a_n = a_1 + r \times (n - 1) = \pi + 0,5\pi(n - 1)$

En calculant a_0 même s'il n'est pas censé exister : $a_n = a_0 + r \times n = 0,5\pi + 0,5\pi n$

4. Soit L_n la longueur totale des demi cercles : $a_1 + a_2 + \dots + a_n$.

À quelle étape aura-t-on $L_n \geq 1000$?

$$\text{Cette somme vaut } L_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n(\pi + 0,5\pi + 0,5\pi n)}{2} = \frac{1,5\pi n + 0,5\pi n^2}{2}$$

Par dichotomie (en tâtonnant) on peut trouver le premier résultat dépassant 1000 :

$$L_{34} \approx 988$$

$$L_{35} \approx 1045$$

Ce sera donc pour $n = 35$.

5. L'algorithme suivant permet de trouver la réponse à la question précédente. Compléter cet algorithme :

```
1 from math import *
2 n=1
3 a=pi
4 l=pi
5 while l<1000:
6     n= n + 1
7     a= a + 0,5*pi
8     l= l + a
9 print( n )
```

Exercice 2.

Trois dés cubiques, indiscernables au toucher, sont placés dans une urne.

Deux de ces dés sont normaux : leurs faces sont numérotées de 1 à 6.

Le troisième est spécial : trois de ses faces sont numérotées 6, les trois autres sont numérotées 1.

On tire de l'urne, simultanément et au hasard, deux dés parmi les trois et on les lance.

On note N l'événement : "les deux dés tirés sont normaux".

On note S l'événement : "les deux faces supérieures obtenues après le lancer sont numérotées 6".

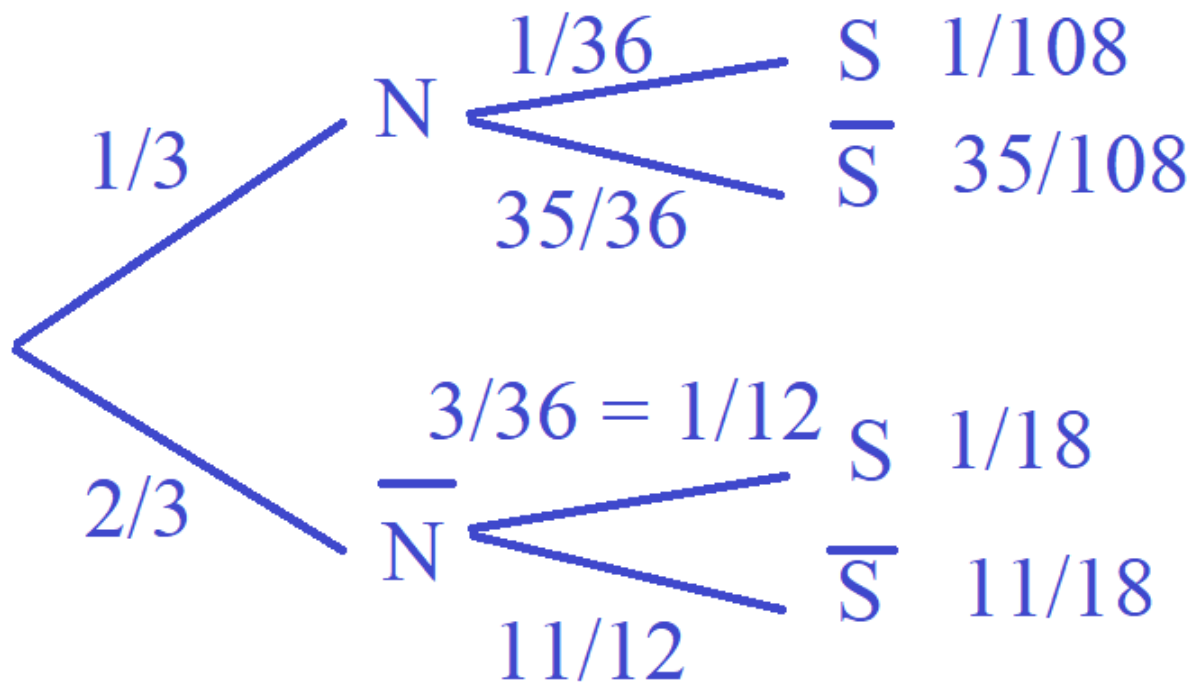
1. Représenter la situation avec un arbre ou un tableau.

Pour pouvoir compléter l'arbre ou le tableau il nous faut quelques données :

Tout d'abord $P(N)$ est la probabilité que les deux dés tirés soient normaux. Cela correspond à 1 combinaison sur 3 (normal-normal / normal-spécial / spécial-normal).

Ensuite si on a N alors il n'y a qu'une seule combinaison correspondant au double six. La probabilité $P_N(S)$ est de 1 sur 36.

Si on a $\bar{N}$ alors il y a trois combinaisons correspondant au double six puisqu'il y a 3 six sur le dé spécial. La probabilité $P_{\bar{N}}(S)$ est de 1 sur 36.



	N	$\overline{N}$	Total
S	1/108	1/18	7/108
$\overline{S}$	35/108	11/18	101/108
Total	1/3	2/3	1

On a bien $P(S) = \frac{1}{108} + \frac{1}{18} = \frac{7}{108}$ d'après les probabilités totales.

2. Pour chacune des probabilités ci-dessous calculer sa valeur puis donner une interprétation (une phrase) dans le contexte de l'exercice.

a. $P(\overline{N}) = \frac{2}{3}$ est la probabilité que l'un des dés tirés soit le dé spécial.

b. $P_N(S) = \frac{1}{36}$ est la probabilité d'obtenir six sur les deux dés **sachant que** l'on a deux dés normaux.

c. $P(N \cap S) = P(N) \times P_N(S) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{36} = \frac{1}{108}$ est la probabilité d'avoir deux dés normaux **et** d'obtenir six sur les deux dés.

d. $P(N \cup S) = P(N) + P(S) - P(N \cap S) = \frac{1}{3} + \frac{7}{108} - \frac{1}{108} = \frac{7}{18}$ est la probabilité d'avoir deux dés normaux **ou** d'obtenir six sur les deux dés.

3. N et S sont ils indépendants?

On voit que $P_N(S) = \frac{1}{36}$ mais que $P(S) = \frac{7}{108}$, on en conclut que N et S sont dépendants.

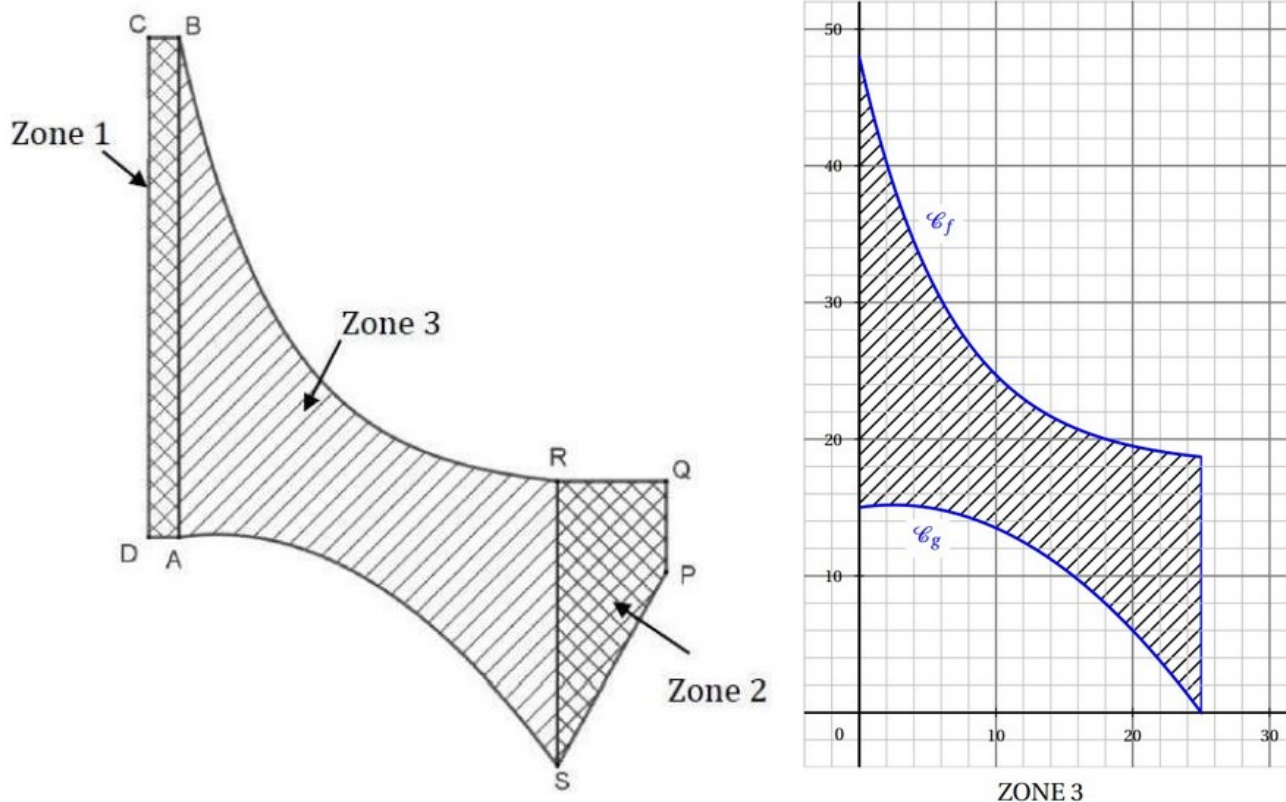
Exercice 3.

Un navire expérimental, s'inspirant de la forme des raies, est en projet : le Manta. Son rôle serait de collecter les déchets plastiques flottant en surface.

Le Manta est prévu pour produire lui-même l'énergie nécessaire à son fonctionnement, grâce entre

autres, à des panneaux solaires.

Nous allons ici déterminer la surface de panneaux solaires sur un flanc du navire.



Le schéma ci-dessus représente la surface de panneaux solaires sur le flanc droit du navire. On a partagé cette surface en 3 zones :

- la zone 1 : un rectangle ABCD, tel que AB = 35 m et BC = 2 m ;
- la zone 2 : un trapèze rectangle PQRS, tel que PQ = 6 m ; RQ = 7,2 m et RS = 18,7 m ;
- la zone 3, qui a été modélisée, et dont la surface, dans le plan muni d'un repère orthonormé d'unité 1 mètre correspond à la partie du plan limitée par les droites verticales d'équations $x = 0$ et $x = 25$ ainsi que les courbes représentatives des fonctions f et g définies sur $[0; 25]$ par :

$$f(x) = 0,00025x^4 - 0,0173x^3 + 0,44x^2 - 5,31x + 49$$

$$g(x) = -0,03x^2 + 0,15x + 15.$$

1. Déterminer une primitive de f .

$$F(x) = 0,00025 \frac{1}{5} x^5 - 0,0173 \frac{1}{4} x^4 + 0,44 \frac{1}{3} x^3 - 5,31 \frac{1}{2} x^2 + 49x = 0,00005x^5 - 0,004325x^4 + \frac{0,44}{3} x^3 - 2,655x^2 + 49x$$

2. En déduire la valeur de $\int_0^{25} f(x) dx$.

$$\int_0^{25} f(x) dx = F(25) - F(0) = \frac{1968,359375}{3} - 0 \approx 656,11979$$

3. $G(x) = -0,01x^3 + 0,075x^2 + 15x$ étant une primitive de $g(x)$ calculer $\int_0^{25} g(x) dx$.

$$\int_0^{25} g(x) dx = G(25) - G(0) = 265,625 - 0 = 265,625$$

4. En déduire l'aire de la zone 3 puis l'aire totale de panneaux solaires sur le flanc droit du navire.

$$\text{La zone 3 a une aire de } 656,11979 - 265,625 \approx 390,49479 \text{ m}^2$$

La zone 1 a une aire de $2 \times 35 = 70 \text{ m}^2$
La zone 2 a une aire de $\frac{(18,7 + 6) \times 7,2}{2} = 88,92$
Ce qui fait une aire totale de $549,41479 \text{ m}^2$.