

NOM :
Classe :

Devoir commun de mathématiques

Date :

- Calculatrice autorisée
- Durée : 1h30
- Cette partie est composée de trois exercices indépendants.

Exercice 1 (5 points)

Un agriculteur du Cantal produit des yaourts et des fromages. Certains sont produits selon les normes de l'Agriculture Raisonnée et d'autres selon celles de l'Agriculture Biologique.

En moyenne, l'agriculteur produit chaque mois 936 yaourts, dont 351 selon les normes de l'Agriculture Biologique, et 264 fromages, dont 198 selon les normes de l'Agriculture Raisonnée.

L'agriculteur effectue chaque mois un contrôle de qualité sur un produit choisi au hasard parmi les 1 200 de sa production mensuelle.

Chaque produit a la même probabilité d'être choisi.

On considère les événements suivants :

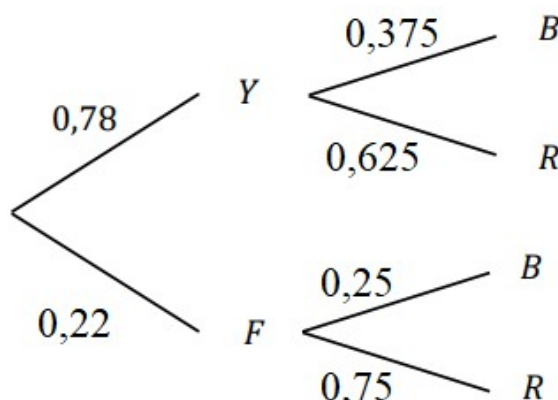
- Y : « Le produit choisi est un yaourt. ».
- F : « Le produit choisi est un fromage. ».
- B : « Le produit respecte le cahier des charges de l'Agriculture Biologique. ».
- R : « Le produit respecte le cahier des charges de l'Agriculture Raisonnée. ».

Dans les questions suivantes, on donnera les valeurs exactes des probabilités demandées.

1. a) Vérifier que $P(Y) = 0,78$.

$$\frac{936}{1200} = 0,78$$

- b) Recopier et compléter l'arbre de probabilités ci-dessous.



2. a) Décrire par une phrase l'évènement $Y \cap B$, puis calculer $P(Y \cap B)$.
Le produit choisi est un yaourt et respecte le cahier des charges de l'Agriculture Biologique.
 $P(Y \cap B) = 0,78 \times 0,375 = 0,2925$
- b) Montrer que la probabilité de l'évènement B est égale à 0,3475.
 $P(B) = P(Y \cap B) + P(F \cap B) = 0,78 \times 0,375 + 0,22 \times 0,25 = 0,3475$
- c) Les évènements Y et B sont-ils indépendants ? Justifier la réponse.
Ces évènements ne sont pas indépendants car on voit que

$P(B)=0,3475$ d'après le calcul précédent.

Alors que $P_Y(B)=0,375$ d'après l'arbre.

Le fait de savoir Y influence la probabilité de B .

Exercice 2 (5 points)

Après les vacances d'été, Céline a pris de bonnes résolutions. Elle a décidé d'arrêter de fumer progressivement. Elle fume cent quarante cigarettes par semaine habituellement et va réduire progressivement sa consommation de cinq cigarettes par semaine.

1. Montrer que cette situation peut être modélisée par une suite que l'on notera u_n (n étant le numéro de la semaine) avec $u_0=140$. Préciser la raison de cette suite.

Le nombre de cigarettes que Céline fume baisse de 5 chaque semaine. Cela peut être modélisé par une suite arithmétique de raison -5.

2. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n .

$$u_n = 140 - 5n$$

3. Combien de cigarettes par semaine Céline fume-t-elle après sept semaines ?

$$u_7 = 140 - 5 \times 7 = 105 \text{ cigarettes.}$$

4. Au bout de combien de semaines Céline aura-t-elle totalement arrêté de fumer ?

$$u_n = 0$$

$$\Leftrightarrow 140 - 5n = 0$$

$$\Leftrightarrow -5n = -140$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{-140}{-5} = 28$$

Au bout de 28 semaines Céline aura totalement arrêté de fumer.

5. Calculer le nombre de cigarettes fumées entre le moment où Céline a commencé à réduire sa consommation et l'arrêt total.

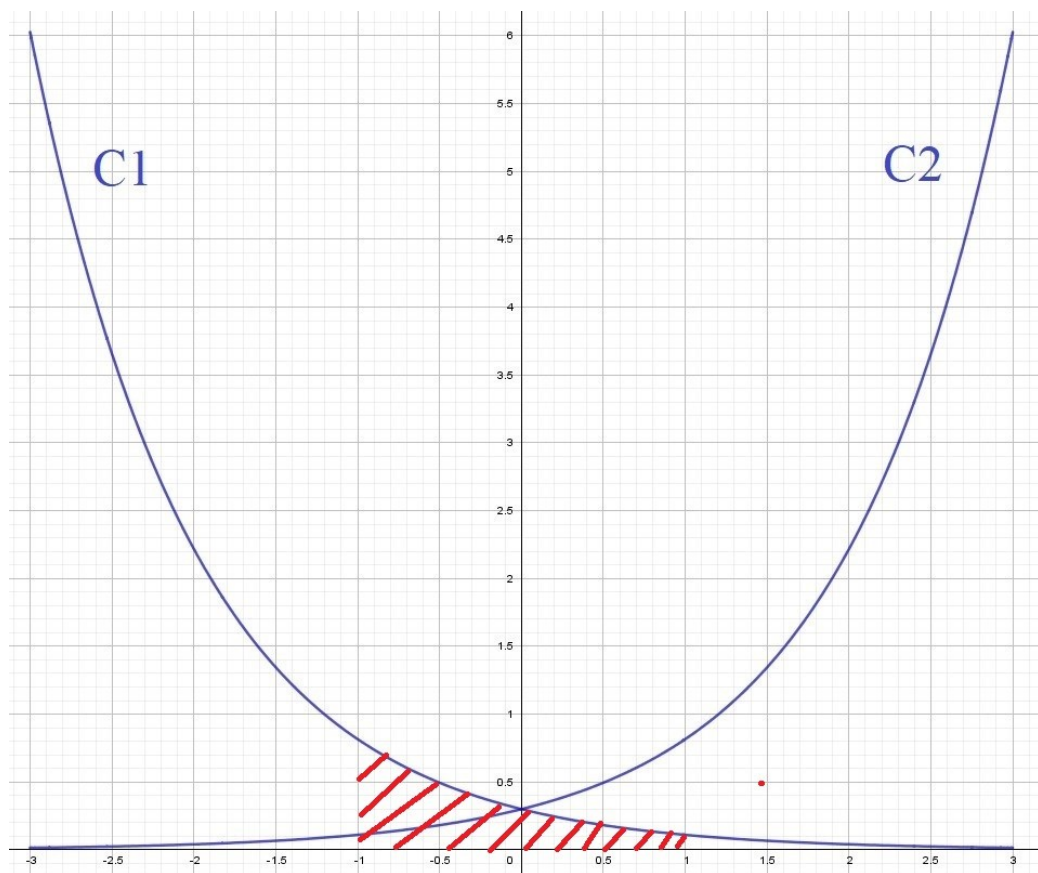
On calcule la somme de u_0 à u_{28} .

$$\frac{(u_0 + u_{28})(28+1)}{2} = \frac{(140+0)(28+1)}{2} = 2030$$

2030 cigarettes fumées au total.

Exercice 3 (5 points)

Ci-dessous le dessin d'un verre à pied. L'unité est le centimètre. Les deux courbes C_1 et C_2 étant les représentations graphiques de deux fonctions.



On considère les fonctions f et g définies par $f(x) = 0,3 \times e^x$ et $g(x) = 0,3 \times e^{-x}$

1. Donner en justifiant le sens de variation des fonctions f et g .

Associer alors chacune des courbes C_1 et C_2 à sa fonction correspondante f ou g .

f est croissante car sa base vaut 2,1 qui est supérieur à 1. A l'inverse g est décroissante car sa base vaut $1 / 2,1$ qui est entre 0 et 1. f correspond donc à C_1 tandis que g correspond donc à C_2

2. Calculer l'image de 3 avec la fonction représentée par C_1 et en déduire l'épaisseur du verre à la périphérie du pied à 0,01 centimètre près.

$$g(3) = \left(\frac{1}{2,1}\right)^3 \approx 0,11$$

L'épaisseur du verre à la périphérie du pied vaut environ 0,11 cm.

3. Les points $M(x; f(x))$ et $N(-x; g(-x))$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées si $f(x) = g(-x)$.

Montrer que les fonctions f et g données ci-dessus vérifient cette égalité.

$$g(-x) = 0,3 \times e^{-(-x)} = 0,3 \times e^x = f(x)$$

4. Résoudre l'équation $f(x) = 8$.

Donner une valeur approchée de la solution à 0,1 près.

$$f(x) = 8$$

$$\square \quad 0,3 \times e^x = 8$$

$$\square \quad e^x = \frac{8}{0,3}$$

$$\square \quad \ln(e^x) = \ln\left(\frac{8}{0,3}\right)$$

$$\square \quad x \times \ln(e) = \ln\left(\frac{8}{0,3}\right)$$

$$\square_{\Rightarrow} x = \frac{\ln\left(\frac{8}{0,3}\right)}{\ln(e)} \approx 3,3$$

5. Calculer $\int\limits_{-1}^1 g(x) dx$ et hachurer sur la courbe l'aire correspondante.

La primitive de $g(x)$ vaut :

$$G(x) = -0,3 \times e^{-x}$$

Ainsi : $\int\limits_{-1}^1 g(x) dx = G(1) - G(-1) = -0,3 \times e^{-1} - (-0,3 \times e^{-(-1)}) = -0,3e^{-1} + 0,3e \approx 0,7$