

DEVOIR COMMUN - MATHÉMATIQUES

Enseignants : CETOUT S., HALTER N.,

MARTIN C., TRIMOREAU V., YUKSEL U.

Date : 17/05/2023

Nom :

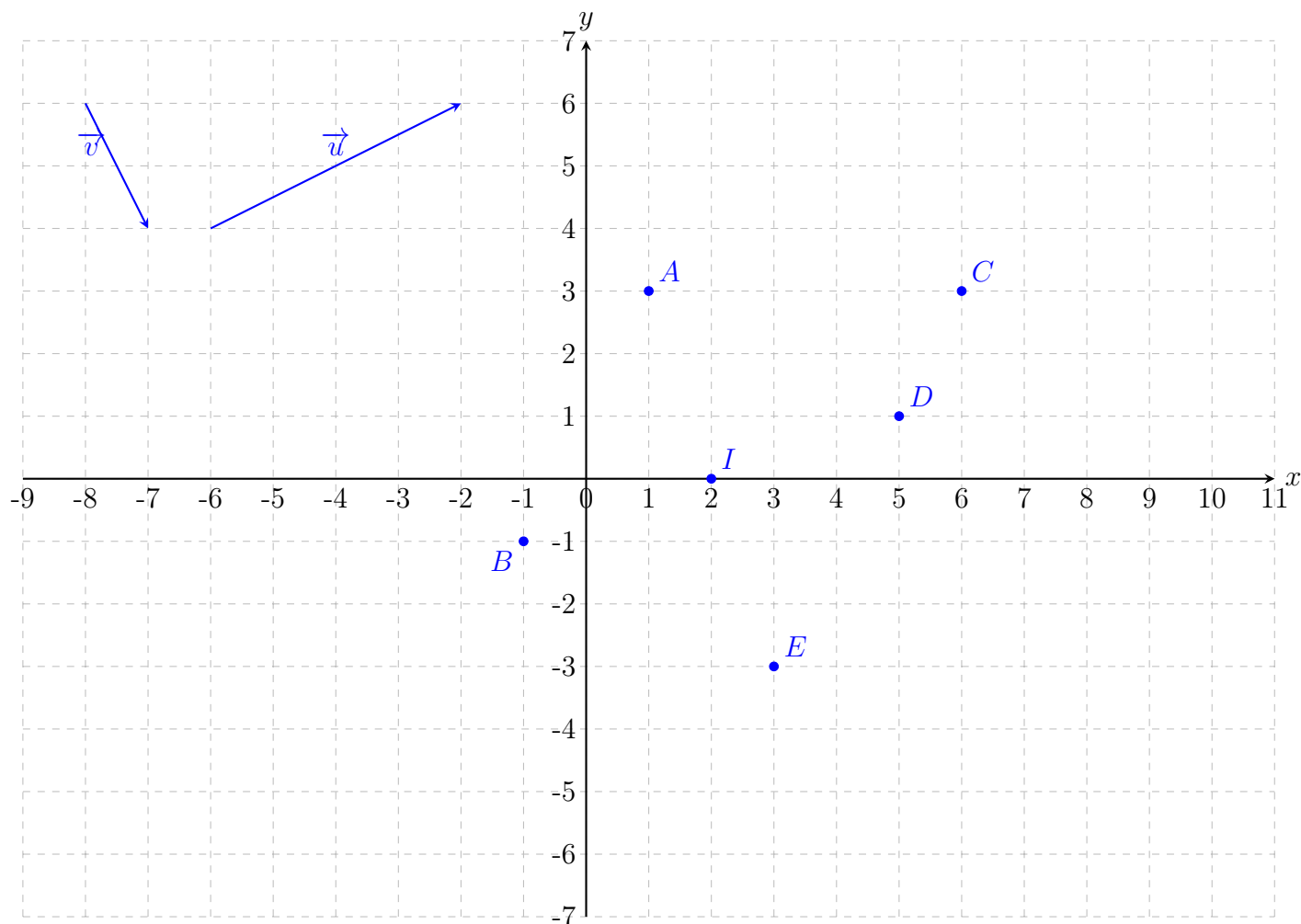
Prénom :

Classe :

Note :

Exercice 1:

14 points



1. Lire les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

2. (a) Placer le point C tel que $\overrightarrow{AC} = \vec{u} + \vec{v}$ en indiquant les traits de construction.
(b) Lire les coordonnées de C .

$$C(6;3)$$

3. (a) Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- (b) Calculer la longueur AB .

$$AB = \sqrt{(-2)^2 + 4^2} = \sqrt{20}$$

4. (a) Calculer les coordonnées de D tel que $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

$$\begin{pmatrix} x_D - 1 \\ y_D - 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

On en déduit que $x_D - 1 = 4$ donc $x_D = 5$ et que $y_D - 3 = -2$ donc $y_D = 1$.

- (b) Montrer que le triangle ABD est rectangle. Justifier.

On sait que $AB = \sqrt{20}$. En calculant de la même façon qu'à la question 3.(b) on obtient :

$$AD = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = \sqrt{20}$$

$$BD = \sqrt{6^2 + 2^2} = \sqrt{40}$$

On remarque alors que $BD^2 = AD^2 + AB^2$. D'après le théorème de Pythagore ce triangle est rectangle en A.

5. (a) Calculer les coordonnées du point I milieu de $[BD]$.

$$I = \left(\frac{x_B + x_D}{2} ; \frac{y_B + y_D}{2} \right) = \left(\frac{-1 + 5}{2} ; \frac{-1 + 1}{2} \right) = (2 ; 0)$$

- (b) E est le symétrique de A par rapport à I , calculer les coordonnées de E .

Cette phrase signifie que $\overrightarrow{IE} = \overrightarrow{AI}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_E - 2 \\ y_E - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

D'où $x_E - 2 = 1$ c'est à dire $x_E = 3$ et $y_E = -3$.

- (c) Quelle est la nature du quadrilatère $ADEB$? Justifier.

I est par définition au milieu de $[BD]$ mais également de $[AE]$ du fait de la symétrie vue à la question précédente. Ainsi $ADEB$ est un parallélogramme.

De plus on a vu que ABD est rectangle en A ce qui nous permet de conclure que $ADEB$ est un rectangle.

Enfin on a vu que les longueurs AB et AD sont égales (elles valent $\sqrt{20}$) donc $ADEB$ est même un carré.

6. Montrer que les points C , D et E sont alignés.

Calculons tout d'abord les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{CE}$:

$$\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} x_D - x_C \\ y_D - y_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 - 6 \\ 1 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{CE} = \begin{pmatrix} x_E - x_C \\ y_E - y_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 6 \\ -3 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \end{pmatrix}$$

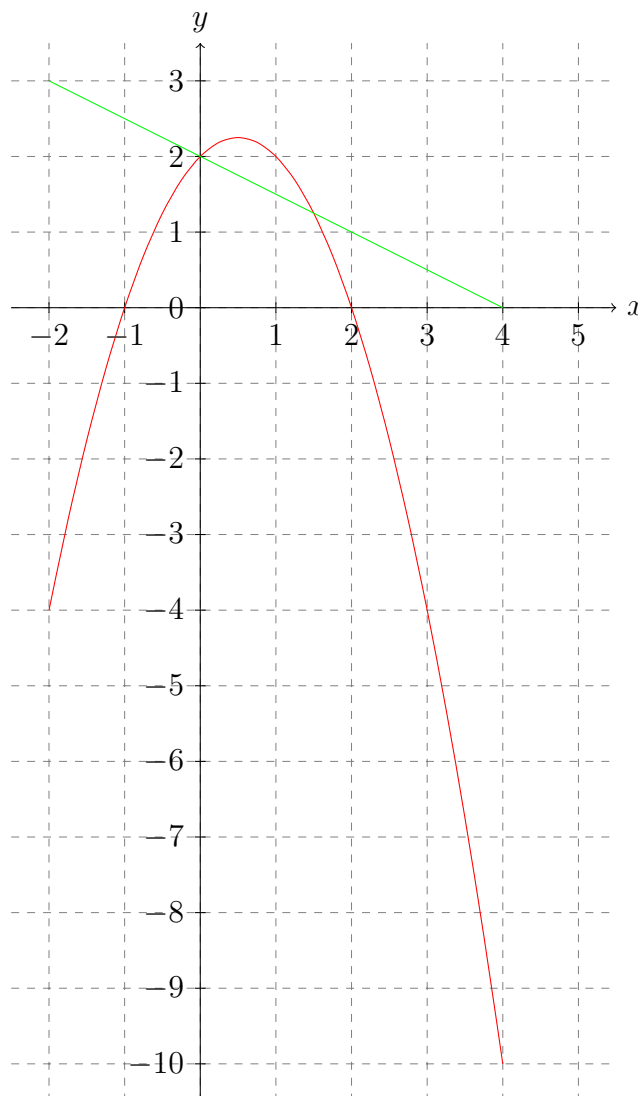
On calcule alors le déterminant de ces deux vecteurs : $-1 \times (-6) - (-3) \times (-2) = 0$

Le résultat est nul, on en conclut que les deux vecteurs sont colinéaires ce qui implique que les points C , D et E sont alignés.

Exercice 2:

12,5 points

On a représenté la fonction f définie sur $[-2; 4]$ par : $f(x) = -x^2 + x + 2$

**Partie A**

1. Déterminer **graphiquement** l'image de 1 par la fonction f .

L'image de 1 par la fonction f est 2.

2. Déterminer **par le calcul** l'image de $\frac{1}{2}$ par la fonction f .

On calcule $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} + 2 = \frac{9}{4}$

3. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $[-2; 4]$.

x	-2	0.5	4
$f(x)$	-4	2.25	-10

4. (a) Montrer que $f(x) = (-x - 1)(x - 2)$.

On développe : $(-x - 1)(x - 2) = -x^2 + 2x - x + 2 = -x^2 + x + 2$ ce qui est bien égal à $f(x)$.

- (b) Déterminer **par le calcul** les antécédents de 0 par la fonction f .

Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul. On utilise donc plutôt la forme factorisée :

$f(x) = (-x - 1)(x - 2) = 0$ si et seulement si $(-x - 1) = 0$ ou $(x - 2) = 0$.

Cela revient à avoir $x = -1$ ou $x = 2$.

5. Avec la précision permise par le graphique, résoudre l'inéquation $f(x) > -2$.

L'ensemble des solutions de cette inéquation est l'intervalle $] -1, 5 ; 2, 5[$.

Partie B

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \left(\frac{1}{4}x - 1\right)^2 - \frac{1}{16}x^2 + 1$.

6. Montrer que $g(x) = -\frac{1}{2}x + 2$.

On développe l'expression donnée en faisant attention à l'identité remarquable :

$$g(x) = \left(\frac{1}{4}x - 1\right)^2 - \frac{1}{16}x^2 + 1 = \frac{1}{16}x^2 - 2 \times \frac{1}{4}x + 1 - \frac{1}{16}x^2 + 1 = -\frac{1}{2}x + 2$$

7. Dresser le tableau de signe de la fonction g sur $\mathbb{R}$. Justifier soigneusement.

Première solution en utilisant le cours : $g(x)$ est une fonction affine donc elle s'annule en $-\frac{b}{a} = \frac{-2}{-0,5} = 4$. Elle est du signe de a pour les x situés à droite et de l'opposé du signe de a à gauche.

Deuxième solution en résolvant l'inéquation : Commençons par étudier le signe de g en cherchant les valeurs de x pour lesquelles g est positive :

$$g(x) > 0 \iff -\frac{1}{2}x + 2 > 0 \iff -\frac{1}{2}x > -2 \iff x < -2 \div \left(-\frac{1}{2}\right) \iff x < 4.$$

Dans un cas comme dans l'autre on obtient le tableau ci-dessous :

x	$-\infty$	4	$+\infty$
$g(x)$	$+$	0	$-$

8. Tracer la représentation graphique de g dans le même repère que celle de la fonction f . Justifier.

Cette fonction étant affine on a simplement tracé en reliant les points qui correspondent aux images ci-dessous :

$$g(-2) = -\frac{1}{2} \times (-2) + 2 = 3$$

$$g(4) = -\frac{1}{2} \times 4 + 2 = 0$$

9. (a) Déterminer **graphiquement** les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$.

$x = 0$ et $x = 1,5$.

- (b) Déterminer **par le calcul** les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$.

$$\begin{aligned} f(x) = g(x) &\iff -x^2 + x + 2 = -\frac{1}{2}x + 2 \iff -x^2 + x + 2 + \frac{1}{2}x - 2 = 0 \iff \\ -x^2 + \frac{3}{2}x &= 0 \iff x \left(-x + \frac{3}{2}\right) = 0 \end{aligned}$$

Grâce cette forme factorisée on en déduit que cette équation est valide pour $x = 0$ ou pour $-x + \frac{3}{2} = 0$ c'est à dire $x = \frac{3}{2}$.

- (c) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \leq g(x)$.

$[-2 ; 0] \cup [1,5 ; 4]$

Exercice 3:

6 points

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples, aucune justification n'est attendue. Pour chaque question, **entourer la ou les réponses exactes**. Une mauvaise réponse ou une absence de réponse n'enlève aucun point.

1. Quelle est l'expression de la fonction inverse ?		$\frac{1}{x}$									
2. Quelle est l'image de -5 par la fonction cube ?			-125								
3. Quelle est l'ensemble de définition de la fonction racine carrée ?	$[0; +\infty[$										
4. Soit $f(x) = -3x + 2$, pour quelles valeurs de x , $f(x) \geq 5$?		$x \leq -1$	$] - \infty; -1]$								
5. Quel est le tableau de variation, sur $\mathbb{R}$, de la fonction carrée ?	<table border="1"> <tr> <td>x</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>$+\infty$</td></tr> <tr> <td>x^2</td><td></td><td></td><td></td></tr> </table>	x	$-\infty$	0	$+\infty$	x^2					
x	$-\infty$	0	$+\infty$								
x^2											

Exercice 4:

7,5 points

1. (a) Résoudre le système suivant :
$$\begin{cases} 8x + 3y = 39,5 \\ 7x + 9y = 50,5 \end{cases}$$

Commençons par multiplier par 3 la première ligne :

$$\begin{cases} 24x + 9y = 118,5 \\ 7x + 9y = 50,5 \end{cases}$$

Maintenant qu'il y a un élément commun entre les deux lignes nous pouvons les soustraire :

$$24x - 7x + 9y - 9y = 118,5 - 50,5 \quad \Longleftrightarrow \quad 17x = 68 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{68}{17} = 4$$

Pour trouver y on remplace x dans l'une des équations de départ :

$$8 \times 4 + 3y = 39,5 \quad \Longleftrightarrow \quad 32 + 3y = 39,5 \quad \Longleftrightarrow \quad 3y = 39,5 - 32 = 7,5 \quad \Longleftrightarrow \quad y = \frac{7,5}{3} = 2,5$$

- (b) Une balade d'une heure en mer est proposée à deux groupes de touristes. Le premier groupe, composé de 8 adultes et de 3 enfants, paie 39,50 euros. Le second, composé de 7 adultes et de 9 enfants, paie 50,50 euros.

Combien une famille de 2 adultes et trois enfants devra-t-elle payer ?

Cette situation correspond exactement au système de la question précédente avec x le tarif adultes et y le tarif enfants. Une famille de deux adultes et trois enfants devra payer $2 \times 4 + 3 \times 2,5 = 15,5$ euros.

2. Dans un restaurant, un couple commande 1 pizza et 2 jus de fruit et paye 11 euros. A la table voisine, des amis commandent 5 pizzas et 9 jus de fruit et payent 53 euros. Toutes les pizzas sont au même prix. Tous les jus de fruit sont au même prix.

Calculer le prix d'une pizza et celui d'un jus de fruit. Expliquer la méthode utilisée. Toute trace de recherches sera prise en compte dans la notation.

On commence par modéliser la situation avec un système. On pose p le prix d'une pizza et j le prix d'un jus de fruit :

$$\begin{cases} 1p + 2j = 11 \\ 5p + 9j = 53 \end{cases}$$

Comme il y a un p seul dans la première équation il sera facile de procéder par substitution cette fois. En effet cette équation devient $p = 11 - 2j$ et on peut remplacer p par $11 - 2j$ dans la seconde équation :

$$5 \times (11 - 2j) + 9j = 53 \quad \Longleftrightarrow \quad 55 - 10j + 9j = 53 \quad \Longleftrightarrow \quad 55 - j = 53 \quad \Longleftrightarrow \quad -j = 53 - 55 = -2 \quad \Longleftrightarrow \quad -j = 2$$

$$\text{De plus } p = 11 - 2j = 11 - 2 \times 2 = 7$$

Ainsi le prix d'une pizza est de 7 euros et celui d'un jus de 2 euros.

3. Afin d'encourager son fils à étudier l'arithmétique, Clavius accepte de lui donner 8 sous pour chaque problème correctement résolu. Mais il lui retire 5 sous dans le cas contraire. Après 26 problèmes, chacun a donné autant qu'il a reçu.

Combien son fils a-t-il résolu correctement de problèmes ?

Problème dû à C.Clavius (1538-1612), mathématicien allemand, auteur du calendrier grégorien encore en usage aujourd'hui. . .

On pose x le nombre de problèmes résolus et y le nombre de problèmes non résolus.

Il y a au total 26 problèmes posés donc on a $x + y = 26$.

De plus au total aucun argent ne sera échangé donc $8x - 5y = 0$.

De ce fait le système qui correspond à la situation décrite est le suivant :

$$\begin{cases} x + y &= 26 \\ 8x - 5y &= 0 \end{cases}$$

La première équation permet de déduire que $y = 26 - x$.

En plaçant ce résultat dans la seconde équation on a : $8x - 5(26 - x) = 0 \iff 8x - 130 + 5x = 0 \iff 13x - 130 = 0 \iff 13x = 130 \iff x = \frac{130}{13} = 10$

Son fils a résolu correctement 10 problèmes.