

DS de Mathématiques

Durée 1 heure.

Tout au long du devoir rédiger précisément en justifiant à chaque fois.

Exercice 1	Barème	Exercice 2	Barème	Exercice 3	Barème	Communiquer	Barème
1. et 2.	/3	1.	/2		/3		/3
3. et 4.	/3	2.	/2				
		3.	/2				
		4.	/2				

Nom et prénom :

Exercice 1. (6 points)

Une population de 10 000 bactéries augmente de 5% toutes les 10 minutes.

1. Combien seront-elles dans 10 minutes?

Une hausse de 5% s'applique en multipliant par $1 + \frac{5}{100} = 1,05$. C'est le coefficient multiplicateur.

On a donc 10 minutes après le début $10000 \times 1,05 = 10500$ bactéries.

2. Et dans une heure?

On doit appliquer 6 fois la hausse puisqu'il y a 6 fois 10 minutes dans une heure. On fait donc : $10000 \times 1,05 \times 1,05 \times 1,05 \times 1,05 \times 1,05 \times 1,05 = 10000 \times 1,05^6 \approx 13401$ bactéries.

3. Au bout de combien de temps cette population aura doublé?

On multiplie par 1,05 autant de fois que nécessaire pour dépasser 20000 bactéries.

$$10000 \times 1,05^{14} \approx 19799.$$

$$10000 \times 1,05^{15} \approx 20789.$$

Ce sera donc après 15 fois 10 minutes ce qui donne 150 minutes ou 2h30.

4. De combien de % cette population grandit en 1 minute?

En 1 minute la croissance est telle que si on l'applique 10 fois on obtiendra une hausse de 5%. On ne calcule qu'avec les coefficients multiplicateur (diviser par 10 le taux ne fonctionnera pas!) donc on souhaite avoir le coefficient multiplicateur C tel que :

$$c^{10} = 1,05$$

$$\text{Cela revient à calculer : } c = \sqrt[10]{1,05} \approx 1,00489.$$

Il reste à le traduire en taux : $(1,00489 - 1) \times 100 = 0,489\%$ de hausse chaque minute.

Exercice 2. (8 points)

Nous allons tenter de calculer la surface de matière nécessaire à la fabrication d'un logo, visible ci-dessous, coloré en bleu. Pour cela voici quelques mesures : $BE = 8\text{cm}$; $AB = 4\text{cm}$; $\widehat{FEB} = 30^\circ$; $\widehat{EBF} = 90^\circ$.

Nous savons également que C est au milieu de $[BF]$ et que le cercle dessiné a pour diamètre EF et pour milieu D .

1. Démontrer (en utilisant avec précision un théorème) que (AD) est parallèle à (BF) .

Pour démontrer le parallélisme dans le triangle BEF on va utiliser le théorème de Thalès. On peut l'appliquer puisque E, A, B et E, D, F sont alignés dans cet ordre.

Si $\frac{EA}{EB} = \frac{ED}{EF}$ alors les droites (AD) et (BF) sont parallèles.

Or on a $\frac{EA}{EB} = \frac{4}{8} = 0,5$ et $\frac{ED}{EF} = 0,5$ car c'est le rayon du cercle divisé par le diamètre.

L'égalité est donc vérifiée et les droites sont bien parallèles.

2. Calculer les longueurs AD et ED .

Comme (AD) et (BF) sont parallèles on en conclut que l'angle $\widehat{EAD}$ est droit. Le triangle ADE est donc rectangle en A, on peut appliquer la trigonométrie :

$$\text{Calculons } AD : \tan(30) = \frac{AD}{EA} = \frac{AD}{4}$$

$$\text{Ainsi } AD = \tan(30) \times 4 = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

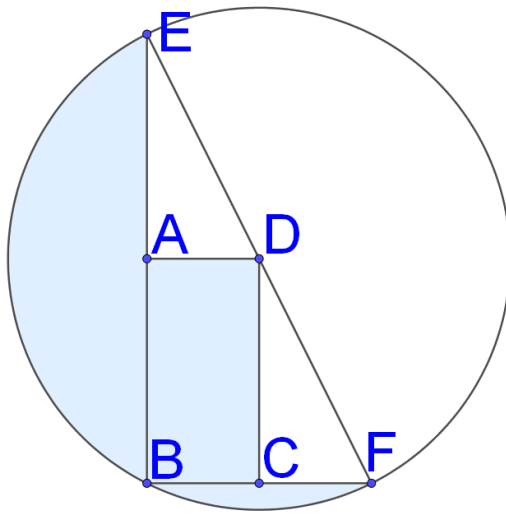
$$\text{Pour } ED \text{ maintenant : } \cos(30) = \frac{EA}{ED} = \frac{4}{ED}$$

$$\text{Ainsi } ED = \frac{4}{\cos(30)} = \frac{8\sqrt{3}}{3}.$$

3. Sachant que l'aire d'un disque vaut $\pi \times \text{rayon}^2$, quelle est l'aire du disque?

$$\text{L'aire du disque vaut } \pi \times ED^2 = \pi \times \frac{8\sqrt{3}}{3}^2 = \frac{64\pi}{3} \approx 67 \text{ cm}^2.$$

4. En déduire l'aire de la surface bleue.



Pour calculer la surface bleue on doit soustraire l'aire des deux triangles AED et CDF à l'aire du demi disque.

Le demi disque a pour surface : $\frac{1}{2} \times \frac{64\pi}{3} = \frac{32\pi}{3}$.

Les deux triangles sont identiques, en effet C étant au milieu de [BF] on a $BC=AD=4\text{cm}$ et ABCD rectangle en A et en B. C'est donc un rectangle. On en conclut que $EA=CD$, que $CF=AD=4\text{cm}$ et on sait déjà que $ED=DF$ puisqu'ils sont rayons du cercle.

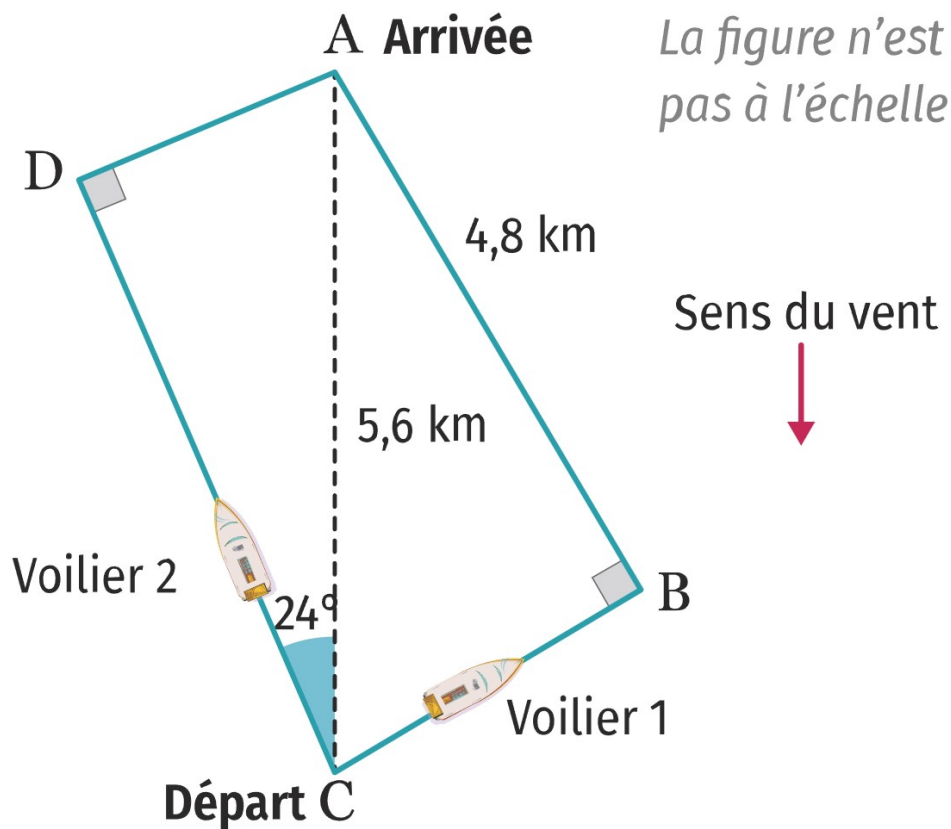
$$\text{ADE et CDF étant identiques, l'aire totale de ces deux triangles vaut : } 2 \times \frac{EA \times AD}{2} =$$

$$2 \times \frac{4 \times \frac{4\sqrt{3}}{3}}{2} = \frac{16\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{L'aire bleue vaut ainsi : } \frac{32\pi}{3} - \frac{16\sqrt{3}}{3} \approx 24,3 \text{ cm}^2$$

Exercice 3. (3 points)

Lorsqu'un voilier est face au vent, il ne peut pas avancer. Si la destination choisie nécessite de prendre une direction face au vent, le voilier devra progresser en faisant des zigzags.



Comparer les trajectoires de ces deux voiliers en calculant la distance, en kilomètre et arrondie au dixième, que chacun a parcourue.

Dans le triangle ABC, rectangle en B on peut calculer la longueur BC grâce au théorème de Pythagore :

$$BC^2 = AC^2 - AB^2 = 5,6^2 - 4,8^2 = 8,32$$

$$BC = \sqrt{8,32} \approx 2,9$$

Ainsi le trajet en passant par B a une longueur de $2,9 + 4,8 = 7,7$ km.

Dans le triangle ACD, rectangle en D on peut utiliser la trigonométrie. AD en particulier peut s'obtenir avec :

$$\sin(24) = \frac{AD}{AC} = \frac{AD}{5,6}$$

$$\text{Ainsi } AD = 5,6 \times \sin(24) \approx 2,3 \text{ km.}$$

$$\text{De la même façon } \cos(24) = \frac{CD}{AC} = \frac{CD}{5,6}$$

$$\text{Ainsi } CD = 5,6 \times \cos(24) \approx 5,1 \text{ km.}$$

Ce voilier aura parcouru au total $5,1 + 2,3 = 7,4$ km.

Pour conclure on peut dire que le trajet passant par D est un peu plus court en distance.