

DS de Mathématiques

Durée 1 heure.

Tout au long du devoir rédiger précisément en justifiant à chaque fois.

Exercice 1 Commun	Barème	Exercice 2 Commun	Barème	Exercice 3 Spécialité	Barème	Communiquer Commun	Barème
1.2.	/3	1.	/1,5	1.f	/5		/3
3.4.	/3	2.3.	/3	1.g	/5		
5.6.	/3	4.	/2	1.h	/5		
		5.	/1,5	2.	/5		

Nom et prénom :

Exercice 1. (9 points)

Une entreprise produit 500 tonnes de déchets en 2008. La production de déchets augmente de 12 % par an, depuis l'année 2008. Pour tout entier naturel n , d_n représente la quantité produite de déchets, exprimée en tonne, en l'année 2008 + n .

- Déterminer la nature de la suite (d_n) en précisant son premier terme et sa raison.
Cette suite est géométrique. En effet une hausse de 12% s'applique en **multipliant** par 1,12 à chaque étape. Le premier terme est 500 et la raison 1,12.

- Selon ce modèle quelle quantité de déchets l'entreprise aura produite lors de l'année 2018?
En 2018 l'entreprise produit $u_{10} = 500 \times 1,12^{10} \approx 1553$ tonnes de déchets.

- Quelle quantité de déchets l'entreprise aura produite **au total** de 2008 à 2018?
Il faut calculer la somme des termes de u_0 à u_{10} . La quantité de déchet totale est de :
$$u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = 500 \times \frac{1 - 1,12^{10+1}}{1 - 1,12} \approx 10327 \text{ tonnes.}$$

En 2018, la nouvelle stratégie commerciale de l'entreprise change les procédés de fabrication afin de diminuer la masse produite de déchets. À compter de l'année 2018, la production des déchets baisse de 4 % par an au cours des quatre années suivantes.

- Selon ce nouveau modèle, estimer la quantité produite de déchets, exprimée en tonne, en 2022. On arrondira le résultat à l'unité.

La baisse de 4% s'obtient en multipliant par $1 + \frac{-4}{100} = 0,96$. En 2022 il se sera écoulé quatre ans donc la quantité produite sera $1553 \times 0,96^4 \approx 1319$ tonnes.

- Résoudre, pour n entier, l'inéquation $1553 \times 0,96^n < 500$.

Par dichotomie on voit que :

$$1553 \times 0,96^{27} \approx 516$$

$$1553 \times 0,96^{28} \approx 495$$

Cette inéquation est donc vérifiée pour $n \geq 28$

- Interpréter le résultat de la question précédente dans le contexte de l'exercice.
L'inéquation précédente permet de conclure que si la situation continue d'évoluer de la même façon, avec une baisse annuelle de 4%, la quantité de déchets reviendra à sa valeur de l'année 2008 lors de la 28ème année de baisse, c'est à dire en 2050.

Exercice 2. (8 points)

1. Calculer les moyennes arithmétique et géométrique de 8586 et de -1195. Arrondir au dixième.
La moyenne arithmétique de ces nombres vaut $\frac{8586 - 1195}{2} = 3695,5$
La moyenne géométrique de ces nombres vaut $\sqrt{8586 \times -1195}$ qui ne peut pas se calculer dans les réels!
2. Soit (u_n) la suite arithmétique telle que $u_7 = 1456$ et $u_{45} = 1551$.
Que valent la raison et u_0 ?
Cette suite a augmenté de $1551 - 1456 = 95$ en $45 - 7 = 38$ étapes. Sa raison est ainsi de $\frac{95}{38} = 2,5$
Pour calculer u_0 on peut partir de u_7 et revenir de 7 étapes en arrière : $u_0 = u_7 - 7 \times r = 1456 - 7 \times 2,5 = 1438,5$.
3. Soit (v_n) la suite géométrique telle que $v_5 = 1240029$ et $v_{12} = 567$.
Que valent la raison et u_0 ?
Cette suite a été multipliée par $\frac{567}{1240029} = \frac{1}{2187}$ en $12 - 5 = 7$ étapes.
Sa raison est ainsi de $\sqrt[7]{\frac{1}{2187}} = \frac{1}{3}$
Pour calculer u_0 on peut partir de u_7 et revenir de 7 étapes en arrière : $u_0 = u_7 - 7 \times r = 1456 - 7 \times 2,5 = 1438,5$.
4. Calculer $652 + 640 + 628 + \dots + (-320)$.
Les trois premiers termes permettent de se rendre compte que cette suite de nombres est arithmétique de raison -12 : $652 - 12 = 640$ et $640 - 12 = 628$.
De plus -320 est le terme de rang 81. En effet :
$$\begin{aligned} u_n &= u_0 + n \times r \\ -320 &= 652 + n \times (-12) \\ -320 - 652 &= u_0 + n \times (-12) \\ -972 &= n \times (-12) \\ \frac{-972}{-12} &= n \\ 81 &= n \end{aligned}$$

Il reste à calculer la somme :
$$652 + 640 + 628 + \dots + (-320) = \frac{(u_0 + u_n)(n+1)}{2} = \frac{(652 - 320)(81+1)}{2} = 13612.$$
5. Compléter l'algorithme suivant afin qu'il calcule le terme de rang 40 de la suite arithmétique de raison -3 et de premier terme 51.

1	$n \leftarrow 0$
2	$u \leftarrow 51$
3	Tant que $n \leq 40$
4	$u \leftarrow u - 3$
5	$n \leftarrow n + 1$
6	Fin tant que

Exercice 3. (Spécialité - 20 points)

1. Dériver les fonctions :

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + 12$$

$$f'(x) = 3x^2 + 4x - 5$$

$$g(x) = \sin(x) \times 5x^2$$

Cette fonction est de la forme $u \times v$ avec $u = \sin(x)$ et $v = 5x^2$.

On a $u' = \cos(x)$ et $v' = 10x$

La dérivée de g est alors :

$$g'(x) = u'v + v'u = \cos(x) \times 5x^2 + 10x \times \sin(x)$$

$$h(x) = \frac{5x^2}{2x+1}$$

Cette fonction est de la forme $\frac{u}{v}$ avec $u = 5x^2$ et $v = 2x + 1$.

On a $u' = 10x$ et $v' = 2$

La dérivée de h est alors :

$$h'(x) = \frac{u'v - v'u}{v^2} = \frac{10x \times (2x+1) - 2 \times 5x^2}{(2x+1)^2} = \frac{20x^2 + 10x - 10x^2}{(2x+1)^2} = \frac{10x^2 + 10x}{(2x+1)^2}$$

2. Calculer la surface sous la courbe entre $x = -3$ et $x = 4$.

