

DS de Mathématiques

Durée 1 heure.

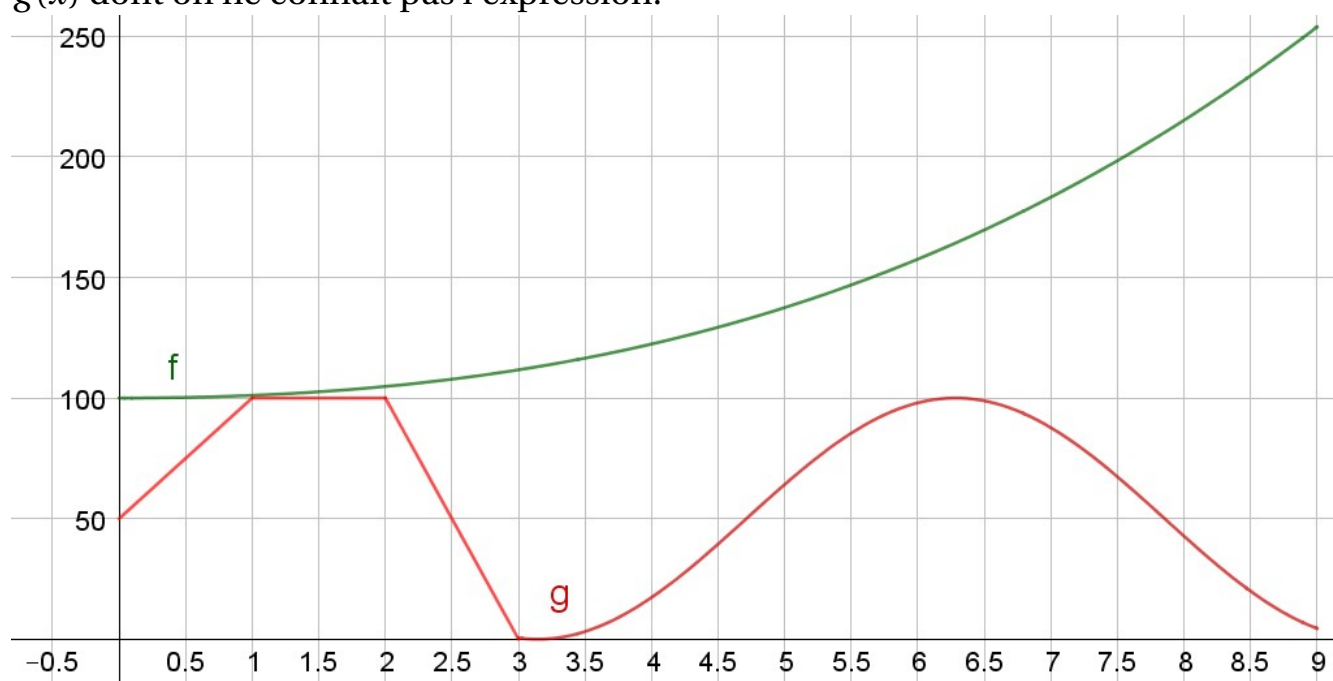
Tout au long du devoir rédiger précisément en justifiant à chaque fois.

Exercice 1 Spécialité	Barème	Exercice 2 Spécialité	Barème	Exercice 3 Tronc commun	Barème	Communiquer	Barème
1.	/2	1.	/2	1.	/5	Spécialité	/2
2.	/2	2.	/2	2.	/5	Commun	/2
3.	/2	3.	/3	3.	/5		
4.	/5			4.	/3		

Nom et prénom :

Exercice 1. (11 points - spé)

Sur le graphique ci-dessous on a tracé les courbes de $f(x) = 0,1x^3 + x^2 + 100$ et de $g(x)$ dont on ne connaît pas l'expression.



1. Calculer graphiquement $\int_0^3 g(x) dx$

Entre $x = 0$ et 1 la surface sous la courbe forme un trapèze. Son aire est de $\frac{(100 + 50) \times 1}{2} = 75$ u.a.

Entre $x = 1$ et 2 la surface sous la courbe forme un rectangle d'aire $100 \times 1 = 100$ u.a.

Enfin entre les abscisses 2 et 3 la surface sous la courbe est un triangle dont l'aire vaut $\frac{100 \times 1}{2} = 50$ u.a.

Cette intégrale vaut donc $75 + 100 + 50 = 225$ u.a.

2. A quoi correspond l'intégrale précédente graphiquement ?

Comme cette fonction est positive sur l'intervalle étudié cette intégrale vaut l'aire encadrée par la courbe de g , l'axe des abscisses et les droites $x = 0$ et $x = 3$.

3. Donner une valeur approchée de $\int_3^9 g(x) dx$

La surface fait environ 13 carreaux. Or chaque carreau a une surface de $50 \times 0,5 = 25$ u.a. ce qui permet de supposer que la surface fait environ $13 \times 25 = 325$ u.a.

4. En déduire l'aire entre les deux courbes.

Pour avoir l'aire entre les deux courbes nous devons faire l'aire sous la courbe de f moins celle sous la courbe de g . Nous connaissons déjà la seconde qui vaut environ $225 + 325 = 550$ u.a. Il reste à calculer celle sous la courbe de f ce qui se fait avec l'intégrale suivante :

$$\int_0^9 f(x) dx = F(9) - F(0) = 0,025 \times 9^4 + \frac{9^3}{3} + 100 \times 9 - (0,025 \times 0^4 + \frac{0^3}{3} + 100 \times 0) = 1307,025 \text{ u.a.}$$

$$\text{En effet } F(x) = 0,1 \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + 100x = 0,025x^4 + \frac{x^3}{3} + 100x$$

$$\text{On peut faire } 1307,025 - 550 = 757,025$$

Exercice 2. (7 points - spé)

1. Calculer la primitive $F(x)$ de $f(x) = \cos(x) - 1$ telle que $F(0) = 5$.

$F(x) = \sin(x) - x + C$, C étant une constante que l'on va trouver grâce à la donnée de $F(0) = 5$.

En effet $F(0) = \sin(0) - 0 + C = C = 5$

La primitive cherchée est donc $F(x) = \sin(x) - x + 5$

2. Calculer la dérivée de $g(x) = x \times \cos(x)$.

$g(x)$ est de la forme $u \times v$ avec $u = x$, $u' = 1$, $v = \cos(x)$ et $v' = -\sin(x)$.

Cela donne : $g'(x) = u'v + v'u = 1 \times \cos(x) - \sin(x) \times x$.

3. On sait que :

$$\int_{-2}^4 h(x) dx = 10 \qquad \int_4^2 h(x) dx = 2 \qquad \int_2^{10} h(x) dx = 15$$

Que vaut alors : $\int_2^{10} 2 \times h(x) + 1 dx$?

On sait que $\int_2^{10} 2 \times h(x) + 1 dx = 2 \times \int_2^{10} h(x) dx + 1 = 2 \times 15 + 1 = 31$

Exercice 3. (18 points - tronc commun)

Une usine produit et installe des piscines dans la région de janvier 2007 à janvier 2019. Cette usine est passée d'une capacité de production annuelle de 300 piscines en 2007 à 1 150 piscines en 2018. La production annuelle augmente du même pourcentage chaque année.

1. Calculer le taux d'évolution annuel de la production de cette usine.

La production a été multipliée par $\frac{1150}{300} = \frac{23}{6} \approx 3,83$ en 11 ans.

Cela revient à une multiplication de $\sqrt[11]{\left(\frac{23}{6}\right)} \approx 1,13$.

Une multiplication de 1,13 par an correspond à une hausse annuelle de 13%.

2. Avec quelle suite peut on modéliser cette situation? Préciser toutes les spécificités de cette suite.

On peut utiliser une suite géométrique de raison 1,13 puisqu'on multiplie chaque année la production par ce nombre. Le premier terme serait alors la valeur en 2007 c'est à dire 300.

Plus précisément $u_n = 300 \times 1,13^n$ lors de l'année 2007 + n .

3. Quelle quantité de piscines ont été installées **au total** entre janvier 2007 et janvier 2019?

On ajoute les productions des années 2007 à 2018 incluses, c'est donc la somme $u_0 + \dots + u_{11} = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = 300 \frac{1 - 1,13^{11+1}}{1 - 1,13} \approx 7695$ piscines.

4. Expliquer ce que fait l'algorithme ci dessous dans le contexte de l'exercice.
Cet algorithme trouve la première année pendant laquelle le nombre de piscines produites sera supérieur à 2000.

$T \leftarrow 2007$ Tant que $U < 2000$ $U \leftarrow U \times 1,13$ $T \leftarrow T + 1$ Afficher T Fin Pour
--