

DS de Mathématiques

Durée 1 heure.

Exercice 1. (9 points)

Pour chaque nombre complexe ci dessous donner, en expliquant, sa partie réelle, sa partie imaginaire, son module et un argument.

1. $z_1 = 1 + i$

Partie réelle = 1 et partie imaginaire = 1. Pour le reste on passe à la forme exponentielle :

$$z_1 = \sqrt{2} e^{i \frac{\pi}{4}} \text{ donc module} = \sqrt{2} \text{ et argument} = \frac{\pi}{4}.$$

2. $z_2 = -\sqrt{3} - i$

Partie réelle = $-\sqrt{3}$ et partie imaginaire = -1. Pour le reste on passe à la forme exponentielle :

$$z_2 = 2 e^{i \frac{7\pi}{6}} \text{ donc module} = 2 \text{ et argument} = \frac{7\pi}{6}.$$

3. $z_3 = 5 e^{i \frac{7\pi}{3}}$

Module = 5 et argument = $\frac{\pi}{3}$. Pour le reste on passe à la forme algébrique :

$$z_3 = 5 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{5}{2} + i \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

Exercice 2. (6 points)

Résoudre les équations ci dessous, avec z un nombre complexe.

1. $z^2 = 25$

$z^2 = (a + ib)^2 = a^2 + 2iab - b^2$. C'est égal à 25 donc on a :

$a^2 - b^2 = 25$ la partie réelle et $2ab = 0$ la partie imaginaire.

Grâce à la partie imaginaire on conclut que $a = 0$ ou $b = 0$.

Si $a = 0$: grâce à la partie réelle on conclut que $-b^2 = 25$ donc $b^2 = -25$ ce qui est impossible.

Si $b = 0$: grâce à la partie réelle on conclut que $a^2 = 25$ donc $a = 5$ ou $a = -5$.

Ainsi on a $z = 5$ ou $z = -5$.

2. $z^2 = 7i$

$z^2 = (a + ib)^2 = a^2 + 2iab - b^2$. C'est égal à $7i$ donc on a :

$a^2 - b^2 = 0$ la partie réelle et $2ab = 7$ la partie imaginaire.

Grâce à la partie réelle on conclut que $a = b$ ou $a = -b$.

Si $a = b$: grâce à la partie imaginaire on conclut que $2a \times a = 7$ donc $a^2 = 3,5$ c'est à dire $a = \sqrt{3,5} = b$ ou $a = -\sqrt{3,5} = b$.

Si $a = -b$: grâce à la partie imaginaire on conclut que $2a \times -a = 7$ donc $a^2 = -3,5$ ce qui

est impossible.

Ainsi on a $z = \sqrt{3,5} + i\sqrt{3,5}$ ou $z = -\sqrt{3,5} - i\sqrt{3,5}$.

3. $z + \bar{z} = 7i$

$z + \bar{z} = a + ib + a - ib = 2a$. Cela ne peut pas être égal à $7i$, il n'y a pas de solution.

Exercice 3. (3 points)

Soient deux nombres complexes : $a = 3 + i\sqrt{3}$ affixe du point A et $b = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ affixe du point B.
O étant le point de coordonnées (0;0), démontrer que ABO est isocèle.

Commençons par transformer a et b dans leur autre forme :

$$a = 2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}} \text{ et } b = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + i\sqrt{3}$$

Le côté OA a pour longueur le module de a : $2\sqrt{3}$.

Le côté OB a pour longueur le module de b : 2.

Le côté AB a pour longueur le module de $a - b = (3 + i\sqrt{3}) - (1 + i\sqrt{3}) = 2$.

Ce triangle est isocèle en B.