

DS de Mathématiques

Durée 1 heure.

Tout au long du devoir rédiger précisément en justifiant à chaque fois.

Exercice 1	Barème	Exercice 2	Barème	Communiquer	Barème
1.	/1	1.2.	/3		/2
2.	/2	3.4.	/3		
3.	/3	5.	/2		
4.	/2	6.	/2		

Nom et prénom :

Exercice 1. (8 points)

1. Calculer la moyenne arithmétique de -256 et de 721.

La moyenne arithmétique de ces deux nombres est $\frac{-256 + 721}{2} = 232,5$.

2. Soit (u_n) la suite arithmétique de raison 20 et telle que $u_{34} = 459$.

Que vaut u_0 ?

Que vaut u_{100} ?

Pour calculer u_0 en partant de u_{34} on doit revenir 34 fois en arrière en enlevant la raison. On obtient :

$$u_0 = u_{34} - 34 \times r = 459 - 34 \times 20 = -221$$

Pour atteindre u_{100} on peut partir de u_0 en ajoutant 100 fois la raison mais on peut aussi partir de u_{34} en ajoutant 66 fois la raison. Faisons cela :

$$u_{100} = 459 + 66 \times 20 = 1779.$$

3. Soit (v_n) la suite arithmétique telle que $v_4 = -146$ et $v_{36} = 515$.

Que vaut la raison ?

Que vaut v_0 ?

Que vaut v_{30} ?

Commençons par trouver la raison. Cette suite a augmenté de $515 - (-146) = 661$ en $36 - 4 = 32$ étapes. La raison vaut donc $\frac{661}{32} \approx 20,66$. Gardons plutôt la fraction pour les calculs suivants, elle sera plus précise.

Maintenant que nous avons la raison nous pouvons faire comme dans la question précédente. Revenir en arrière 4 fois depuis v_4 pour trouver v_0 :

$$v_0 = -146 - 4 \times \frac{661}{32} = \frac{-1829}{8}$$

De même, pour calculer v_{100} partons de v_{36} :

$$v_{100} = 515 + 64 \times \frac{661}{32} = 1837$$

4. Calculer $8 + 23 + 38 + \dots + 638$.

On remarque que cela décrit une suite arithmétique de raison 15. En effet $8 + 15 = 23$ et $23 + 15 = 38$.

Pour pouvoir faire la somme nous avons besoin de savoir quel est le rang du dernier terme : 638. Pour cela appliquons la formule :

$$u_n = u_0 + n \times r$$

$$638 = 8 + n \times 15$$

$$638 - 8 = n \times 15$$

$$630 = n \times 15r$$

$$\frac{630}{15} = n$$

$$42 = n.$$

C'est le 42ème terme. Nous pouvons calculer cette somme grâce à la formule :

$$8 + 23 + 38 + \dots + 638 = \frac{(u_0 + u_n)(n + 1)}{2} = \frac{(8 + 638)(42 + 1)}{2} = 13889.$$

Exercice 2. (10 points)

Un concessionnaire de voitures propose des voitures équipées d'un moteur diesel ou d'un moteur essence. Durant sa première année d'existence en 2000, il a vendu 25000 véhicules avec un moteur diesel et 4000 véhicules avec un moteur essence. Ses ventes de voitures avec un moteur diesel ont diminué de 1400 chaque année, alors que ses ventes de voitures avec un moteur essence ont augmenté de 1350 unités tous les ans.

1. Déterminer le nombre de voitures de chaque type vendues en 2001.

En 2001 il vendra $25000 - 1400 = 23600$ véhicules avec un moteur diesel et $4000 + 1350 = 5350$ véhicules avec un moteur essence.

2. Prouver que cela forme deux suites arithmétiques.

La première suite s'obtient en soustrayant 1400 chaque année, c'est une suite arithmétique de raison -1400. La seconde s'obtient en ajoutant 1350 chaque année, c'est une suite arithmétique de raison 1350.

3. Quelle sont leurs raisons ? Et leurs premiers termes ?

La première suite a pour raison -1400 et son premier terme est 25000.

La seconde suite a pour raison 1350 et son premier terme est 4000.

4. Donner la formule explicite (u_n) de chacune.

La première a pour formule $u_n = 25000 - 1400n$ et la seconde, que l'on nommera v pour ne pas les confondre, $v_n = 4000 + 1350n$.

5. En quelle année les ventes de voitures avec un moteur essence ont-elles dépassé les ventes de voitures avec un moteur diesel ?

On remarque qu'en 2007 on a : $u_7 = 15200$ et $v_7 = 13450$. Les ventes de voitures avec un moteur diesel sont plus importantes.

Par contre en 2008 : $u_8 = 13800$ et $v_8 = 14800$. Les ventes de véhicules avec un moteur essence sont devenues plus importantes.

C'est donc en 2008 que le dépassement s'opère.

6. Combien aura-t-il vendu de voitures au total fin 2020?

Le nombre de véhicules avec un moteur diesel vendues selon ce modèle finit par atteindre 0 en 2018. En effet on a $u_{18} = -200$ mais les ventes ne peuvent être négatives. Pour connaître le nombre de véhicules avec un moteur diesel vendu au total par ce concessionnaire on ajoute toutes les valeurs jusqu'en 2017 :

$$u_0 + \dots + u_{17} = \frac{(u_0 + u_{17})(17 + 1)}{2} = \frac{(25000 + 1200)(18)}{2} = 235800$$

Concernant les voitures avec un moteur essence c'est plus simple, on peut aller jusqu'en 2020 :

$$v_0 + \dots + v_{20} = \frac{(v_0 + v_{20})(20 + 1)}{2} = \frac{(4000 + 31000)(21)}{2} = 367500$$

Le total tout confondu est alors de $235\,800 + 367\,500 = 603\,300$ véhicules.