

DS de Mathématiques

Durée 1 heure.

Exercice 1. (6 points)

Voici quelques données concernant les événements A, B, C et D :

$$P(A) = 0,6$$

$$P(B) = 0,8$$

$$P(C) = 0,8$$

$$P(D) = 0,5$$

$$P_A(C) = 0,6$$

$$P(B \cup D) = 0,9$$

$$P_A(D) = 0,5$$

$$P(A \cap B) = 0,48$$

Avec ces données déduire, quand c'est possible et en justifiant, quels événements sont indépendants et lesquels sont dépendants.

Concernant A et B :

On sait que $P(A \cap B) = 0,48$, or $P(A) \times P(B) = 0,6 \times 0,8 = 0,48$. Les deux résultats étant égaux on en conclut que A et B sont indépendants.

Concernant A et C :

On sait que $P_A(C) = 0,6 \neq P(C)$. Les deux résultats étant différents on en conclut que A et C sont dépendants.

Concernant A et D :

On sait que $P_A(D) = 0,5 = P(D)$. Les deux résultats étant égaux on en conclut que A et D sont indépendants.

Concernant B et C :

Nous n'avons pas d'information permettant de conclure.

Concernant B et D :

On va commencer par calculer $P(B \cap D)$:

On sait que $P(B \cup D) = P(B) + P(D) - P(B \cap D)$

En remplaçant les valeurs connues cela donne : $0,9 = 0,8 + 0,5 - P(B \cap D)$ donc $P(B \cap D) = 0,8 + 0,5 - 0,9 = 0,4$. Or $P(B) \times P(D) = 0,8 \times 0,5 = 0,4$. Les deux résultats étant égaux on en conclut que A et B sont indépendants.

Concernant C et D :

Nous n'avons pas d'information permettant de conclure.

Exercice 2. (12 points)

Dans un club sportif regroupant 250 adhérents, on choisit un membre au hasard et on considère les événements suivants :

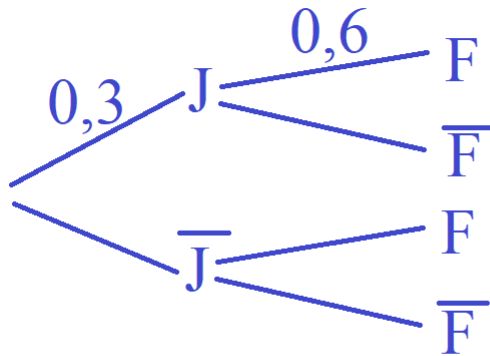
F : "l'adhérent est une femme";

J : "l'adhérent est un jeune";

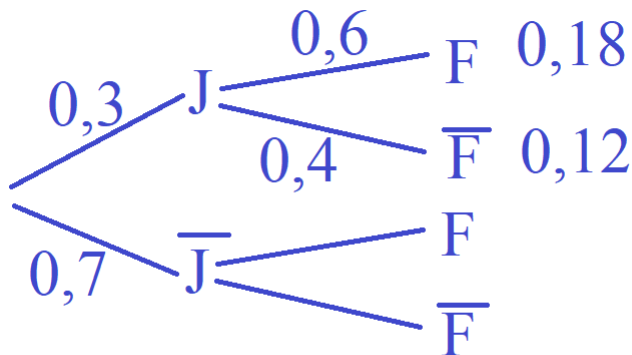
On sait que 46% des adhérents sont des femmes, 30% sont des jeunes et 60% des jeunes sont des femmes.

1. Réaliser un arbre ou un tableau présentant la répartition des membres dans le club.

Pour compléter l'arbre on place d'abord les données directement données par l'énoncé (30% de jeunes et 60% d'entre eux sont des femmes) :

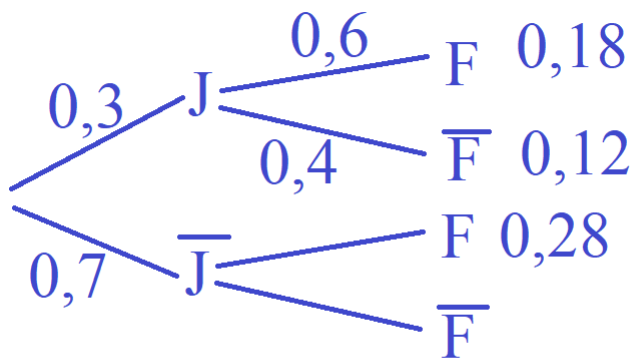


On remplit ensuite tout ce que l'on peut déduire grâce à ces données :

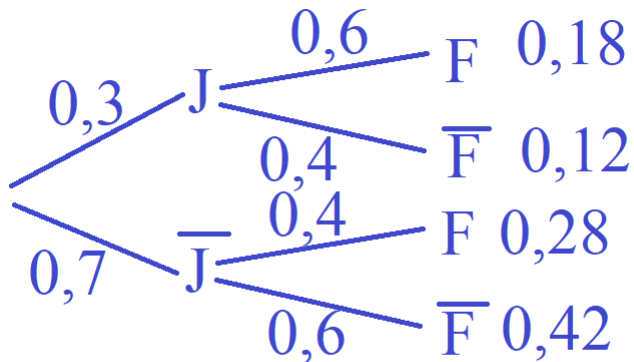


On sait de plus que 46% sont des femmes. Or ce nombre se calcule normalement en faisant $P(J \cap F) + P(\bar{J} \cap F) = 0,18 + P(\bar{J} \cap F)$. Pour que $P(F)$ soit égal à 0,46 il faut donc que $P(\bar{J} \cap F) = 0,46 - 0,18 = 0,28$.

Ajoutons le dans l'arbre :



On peut alors finir de compléter les zones restantes ($\frac{0,48}{0,7} \approx 0,686$) :



2. Pour chacune des probabilités suivantes déterminer sa valeur et donner une interprétation du résultat dans le contexte de l'exercice :

- a. $P_J(F)$
=0,6, c'est directement visible dans l'arbre.
- b. $P_{\bar{J}}(F)$
=0,686, c'est directement visible dans l'arbre.
- c. $P(J \cup F)$
= $P(J) + P(F) - P(J \cap F) = 0,3 + 0,46 - 0,18 = 0,58$
- d. $P(J \cap F)$
=0,18, c'est directement visible dans l'arbre.

3. On considère maintenant en plus l'événement C : "l'adhérent participe à des compétitions". Parmi les femmes, il y a 50 compétiteurs. En tout, 45 jeunes sont compétiteurs, dont 25 femmes. 100 hommes ne font pas de compétition.

Quelle est la probabilité que le membre soit un homme sachant que c'est un jeune compétiteur?

Cela revient à calculer un sachant que : $P_{J \cap C}(H)$. On applique la formule :

$$P_{J \cap C}(H) = \frac{P(J \cap C \cap H)}{P(J \cap C)} = \frac{20}{45}$$

Plus précisément il y a 25 jeunes compétitrices femmes donc 20 jeunes compétiteurs hommes. On divise ce nombre par le nombre de jeunes compétiteurs, ils sont 45.

4. Parmi les événements F , J et C est ce que certains sont indépendants entre eux? Justifier quel que soit le résultat.
On voit directement dans l'arbre que J et F sont dépendants. En effet $P_J(F) = 0,6$ alors que $P(F) = 0,46$.

Concernant F et C on va comparer $P(C)$ et $P_F(C)$.

On sait qu'il y a $50+35=85$ compétiteurs au total. 50 femmes et 35 hommes puisque 100 ne font pas de compétition sur les 135 hommes. On a donc $P(C) = \frac{85}{250} = 0,34$.

Alors que $P_F(C) = \frac{50}{\text{nombre de femmes}} = \frac{50}{0,46 \times 250} = \frac{50}{115} \approx 0,435$

Ces deux valeurs étant différentes on en conclut que ces deux événements sont dépendants.

Enfin il reste J et C . Comparons $P(C)$ et $P_J(C)$. On sait déjà que $P(C) = \frac{85}{250} = 0,34$.

$P_J(C) = \frac{P(J \cap C)}{P(J)} = \frac{45/250}{0,3} = 0,6$.

Ces deux valeurs étant différentes on en conclut que ces deux événements sont dépendants.