

DS de Mathématiques

Durée 1 heure.

Tout au long du devoir rédiger précisément en justifiant à chaque fois.

Exercice 1	Barème	Exercice 2	Barème	Exercice 3	Barème	Communiquer	Barème
1.2.	/2,5	1.	/2	1.2.	/2		/2
3.	/1	2.	/2	3.4.	/3		
4.	/1,5			5.	/1		
	/2			6.	/1		
				7.8.	/2		

Exercice 1. (5 points)

L'inflation, c'est à dire la hausse de prix en un an, en Argentine en 2022 est d'environ 80%.

- Expliquer pourquoi cette situation correspond à une croissance exponentielle.
Une hausse de 80% correspond à une multiplication par 1,8. C'est donc une situation de croissance exponentielle.
- Donner une équation qui permet de modéliser cette situation. Soit avec une suite géométrique soit avec une fonction exponentielle.
Avec n le nombre d'année la suite géométrique pourrait être : $u_n = 1,8^n$.
On peut aussi choisir un "prix de départ". Par exemple en partant de 100 : $u_n = 100 \times 1,8^n$.
On peut faire avec x pour avoir la fonction exponentielle : $f(x) = 1,8^x$
- Quelle est le pourcentage de hausse des prix au bout de deux ans?
Au bout de deux ans on a appliqué deux fois la hausse donc elle a un coefficient multiplicateur de $1,8^2 = 3,24$ ce qui correspond à une hausse de $(3,24 - 1) \times 100 = 224$ %.
- Quelle est le pourcentage de hausse mensuelle des prix?
Un mois correspond à un douzième d'année. On fait donc comme précédemment : $1,8^{1/12} \approx 1,0502$ ce qui correspond à une hausse de $(1,0502 - 1) \times 100 = 5,02$ %.
À la place de la puissance un douzième on peut faire une racine : $1,8^{1/12} = \sqrt[12]{1,8}$

Exercice 2. (4 points)

Simplifier au maximum :

$$1. \frac{(7^{25} \times 7^{15})^{30}}{7^5 \times 7^{120}} = \frac{(7^{25+15})^{30}}{7^{5+120}} = \frac{(7^{40})^{30}}{7^{125}} = \frac{7^{40 \times 30}}{7^{125}} = \frac{7^{1200}}{7^{125}} = 7^{1200-125} = 7^{1075}$$

$$2. \frac{(5^{300} \times 5^{15})^{10} \times 5 \times 7^3}{\sqrt{5} \times 5^{12}} = \frac{(5^{300+15})^{10} \times 5^1 \times 7^3}{5^{0,5} \times 5^{12}} = \frac{(5^{315})^{10} \times 5^1 \times 7^3}{5^{0,5+12}} = \frac{5^{315 \times 10} \times 5^1 \times 7^3}{5^{12,5}} = \frac{5^{3150} \times 5^1 \times 7^3}{5^{12,5}} = \frac{5^{3150+1} \times 7^3}{5^{12,5}} = \frac{5^{3151} \times 7^3}{5^{12,5}} = 5^{3151-12,5} \times 7^3 = 5^{3138,5} \times 7^3$$

Exercice 3. (9 points)

On étudie le nombre de bactéries contenues dans un organisme à la suite d'une infection. Il est donné, en fonction du temps (exprimé en heures), par la fonction f définie par : $f(t) = 200000 \times 1,1^t$ pour t compris entre 0 et 3.

1. Combien de bactéries sont présentes au début de l'étude?

200 000 bactéries, c'est ce qui correspond au k ou au $f(0)$ dans l'équation $f(x) = f(0) \times a^t$

2. Le nombre de bactéries devrait évoluer comment? De combien de %?

Le a dans l'équation $f(x) = f(0) \times a^t$ donne l'évolution chaque heure. Multiplier par 1,1 revient à faire une hausse de 10%.

3. Quel sera le nombre de bactéries au bout de deux heures? Et au bout de trois heures?

$f(2) = 200000 \times 1,1^2 = 242000$ bactéries.

$f(3) = 200000 \times 1,1^3 = 266200$ bactéries.

4. Compléter le tableau suivant en arrondissant à la dizaine.

t	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$f(t)$	200000	209760	220000	230740	242000	253810	266200

5. Interpréter dans le contexte de l'exercice le nombre $f(1,5)$.

Ce nombre correspond aux bactéries présentes au bout d'une heure et demie.

6. Combien dénombre-t-on de bactéries au bout de 2 heures et 45 minutes?

2h et 45min correspond à 2h et trois quarts d'heure, c'est à dire 2,75 heures. On peut aussi trouver ce nombre avec un produit en croix : 60min = 1h donc 45min = $\frac{1 \times 45}{60} = 0,75$

On trouve le résultat avec $f(2,75) = 200000 \times 1,1^{2,75} \approx 259932$

7. Au bout de combien d'heure le nombre de bactéries aura dépassé 600 000?

$f(11) = 200000 \times 1,1^{11} \approx 570623$

$f(12) = 200000 \times 1,1^{12} \approx 627686$.

Il faut 12 heures pour dépasser 600 000 bactéries.

8. Et à la minute près ce serait au bout de combien de temps?

$f(11,52) = 200000 \times 1,1^{11,52} \approx 599617$

$f(11,53) = 200000 \times 1,1^{11,53} \approx 600188$.

Il faut 11,53 heures pour dépasser 600 000 bactéries c'est à dire 11 heures et $0,53 \times 60 \approx 32$ minutes.