

Calculatrice autorisée

Sujet de 4 pages à rendre avec la copie

Exercice 1:

7 points

Toutes les réponses doivent être justifiées et les calculs détaillés. Si nécessaire les résultats seront arrondis au centième.

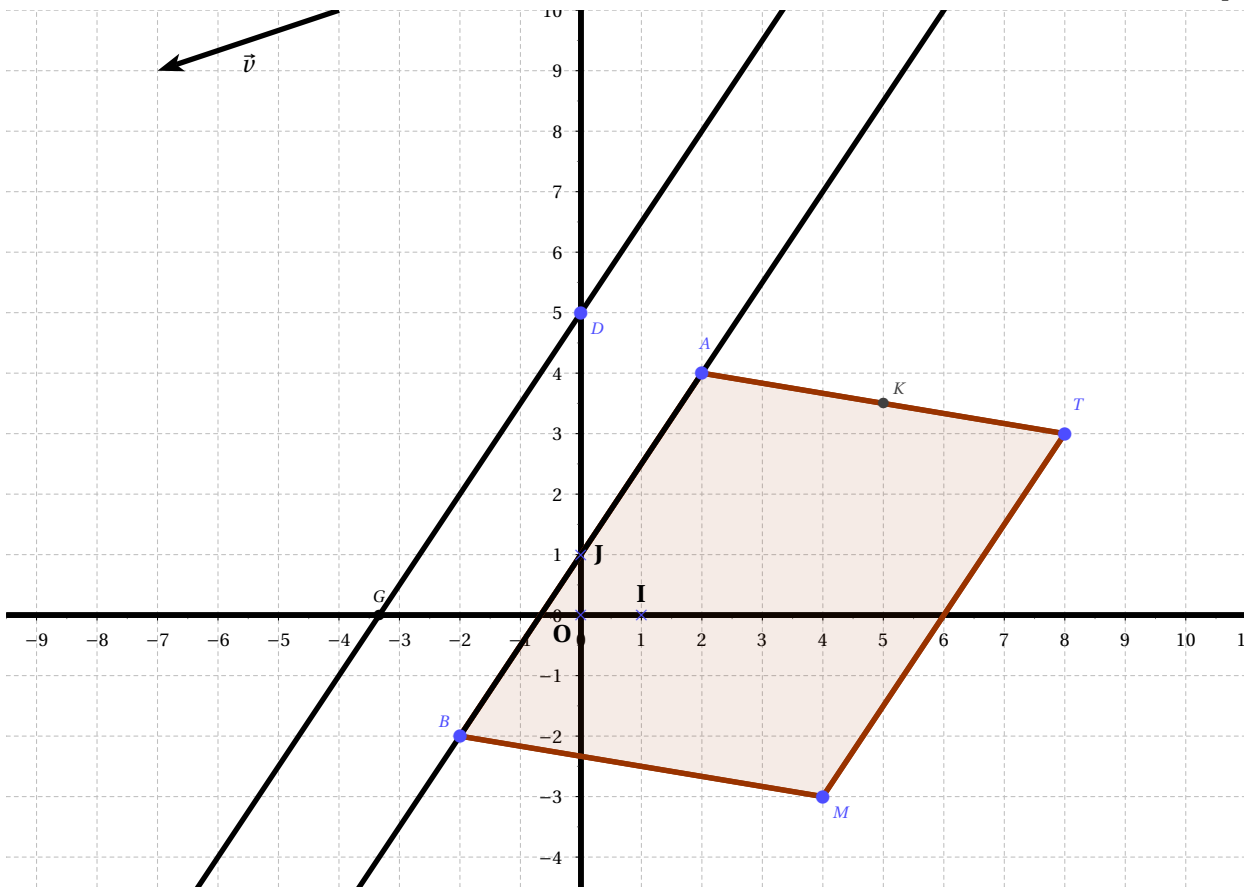
On a relevé les volumes à la sortie d'une chaîne de production d'une usine de remplissage de bouteille. Les résultats sont présentés dans le tableau suivant :

Volume (en cL)	95	96	97	98	99	100	101	102
Effectif	1	3	15	23	31	90	25	10

1. L'étendue de cette série est $102 - 95 = 7$. 0,5
2. Le remplissage moyen est $\frac{1 \times 95 + 3 \times 96 + 15 \times 97 + \dots + 10 \times 102}{1 + 3 + 15 + \dots + 10} \approx 99,53$. 1
3. L'écart-type associé est $\sigma \approx 1,33$. 1
4. La série comporte 198 valeurs donc la médiane est la moyenne de la 99 ième et de la 100 ième valeur. Donc la médiane vaut 100. 0,5+0,5
50% des bouteilles sont remplies à 100 cL ou moins. 0,5
5. Si on ajoute 3 cL à chaque valeur alors la moyenne augmente de 3 cL
Le nouveau remplissage moyen sera 102,53 cL 1
6. Dans une autre usine, le remplissage moyen calculé sur 50 bouteilles est de 95 cL et l'écart-type est de 0,5.
 - a. Le remplissage moyen si on rassemble les deux échantillons est $\frac{198 \times 99,53 + 50 \times 95}{248} \approx 98,62$ cL. 1
 - b. L'écart-type de la deuxième machine est plus faible donc sa production est plus concentrée autour de la moyenne. 1

Exercice 2:

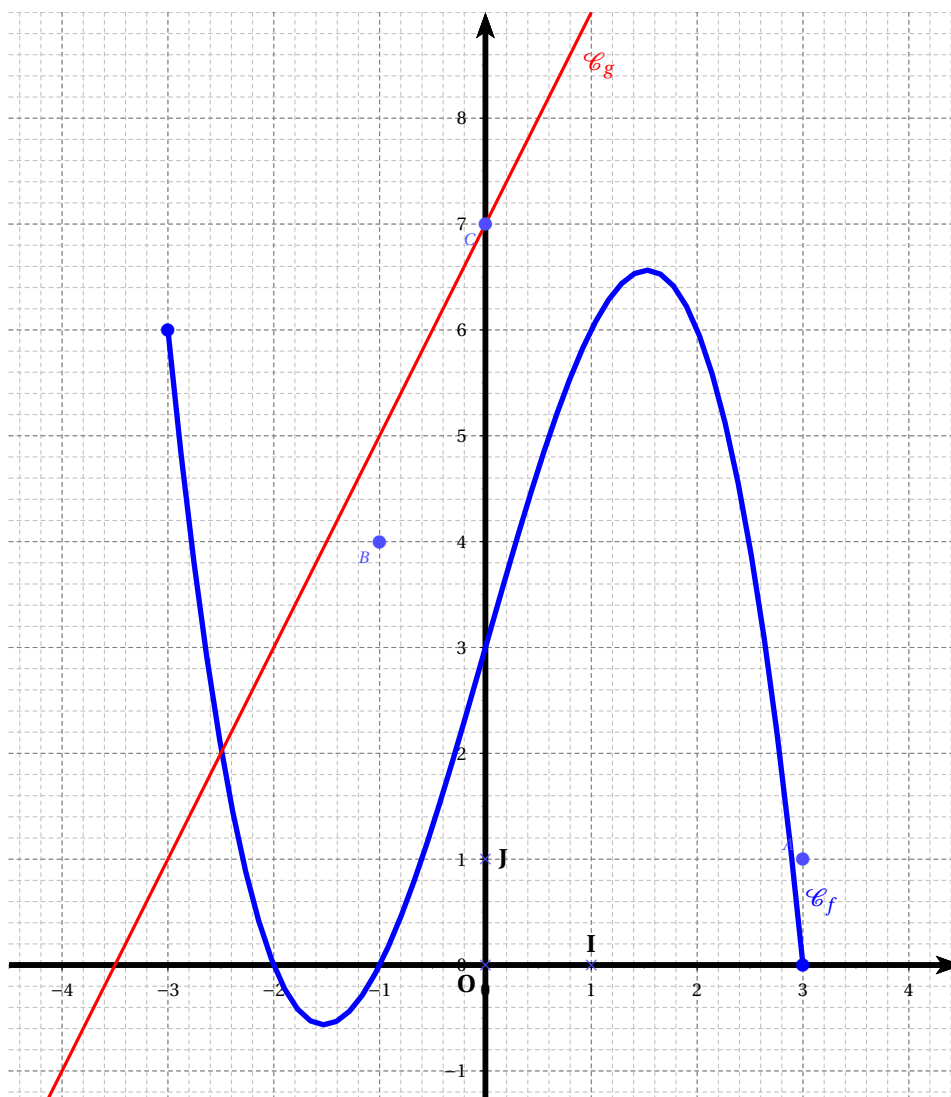
11,5 points



- On a $\vec{u}(3; 0)$ et $\vec{v}(-3; -1)$. **1+1**
- $A(2; 4)$, $B(-2; -2)$, $T(8; 3)$ et $D(0; 5)$ voir ci-dessus. **4X0,25**
- $\vec{AB} \begin{pmatrix} -2-2 \\ -2-4 \end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix}$. **1**
- Pour que $ABMT$ soit un parallélogramme il faut que $\vec{AB} = \vec{TM}$.
Si on note $(x; y)$ les coordonnées de M on a donc $\begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-8 \\ y-3 \end{pmatrix}$
C'est à dire $\begin{cases} -4 = x-8 \\ -6 = y-3 \end{cases}$ ce qui conduit à $x = 4$ et $y = -3$. **0,5 pour égalité de vecteur +1,5 calculs des coordonnées**
- Le milieu K de $[AT]$ a pour coordonnées $\left(\frac{2+8}{2}; \frac{4+3}{2}\right)$ soit $\left(5; \frac{7}{2}\right)$. **1**
- La longueur de la diagonale $[BT]$ est : $\sqrt{(x_T - x_B)^2 + (y_T - y_B)^2} = \sqrt{8 - (-2))^2 + (3 - (-2))^2} = \sqrt{10^2 + 5^2} = \sqrt{125}$. **1**
- Soit H le point de coordonnées $(5,5; 9,3)$. $\vec{AH} \begin{pmatrix} 3,5 \\ 5,3 \end{pmatrix}$. $\det(\vec{AB}, \vec{AH}) = -4 \times 5,3 - 3,5 \times (-6) = -21,2 + 21 = -0,2$
Les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AH}$ ne sont pas colinéaires donc les points A , B et H ne sont pas alignés. **0,5 idée de vecteurs colinéaires +1,5 pour les calculs**
- Pour que les droites (AB) et (DG) soient parallèles il faut et il suffit que les vecteurs $\vec{AB} \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix}$ et $\vec{DG} \begin{pmatrix} x \\ -5 \end{pmatrix}$
C'est à dire si $-4 \times (-5) - x \times (-6) = 0$ ce qui conduit à $x = -\frac{20}{6} = -\frac{10}{3}$. **1,5**

Exercice 3:

10 points



1. L'ensemble de définition de la fonction f est $[-3 ; 3]$. 0,75 :0,25 par valeur et 0,25 pour les crochets

2. $f(x) = 6$ pour $x = -3$, $x = 1$ et $x = 2$. 1 : -0,5 par réponse fausse

3. $f(x) > 3$ pour $x \in]-3 ; -2,6[\cup]0 ; 2,6[$. 1,5

4. Tableau de variation de la fonction f :

x	-3	-1,5	1,5	3
$f(x)$	6	-0,5	6,5	0

1,5

5. Tableau de signes de la fonction f :

x	-3	-2	-1	3
$f(x)$	+	0	-	0

1,25 (0,25 pour chaque

zero et 0,5 pour les signes).

6. On étudie la fonction g définie par $g(x) = 2x + 7$.

a. $g(-3) = 2 \times (-3) + 7 = 1$ donc le point $A(-3 ; 1)$ appartient à la courbe représentative de g
 $g(-1) = 2 \times (-1) + 7 = 5 \neq 4$ donc le point $B(-1 ; 4)$ n'appartient pas à la représentation graphique de la fonction g 1+0,5

b. La représentation graphique de la fonction g passe par A et par le point $C(0 ; 7)$. 1,5 (0,75 tracé et 0,75 justification de la méthode utilisée)

c. $f(x) < g(x)$ pour $x \in [-2,5 ; 3]$. 1

Exercice 4:

9,5 points

1. a. $f(x) = (2x-3)(x+5)$.1
 $= 2x^2 + 10x - 3x - 15$
 $= 2x^2 + 7x - 15$

b. Tableau de signes de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

$2x-3=0 \iff x=\frac{3}{2};$
 $x+5=0 \iff x=-5.$

x	$-\infty$	-5	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$2x-3$		-	- 0 +	
$x+5$		- 0 +		+
$f(x)$		+	0 - 0 +	

2

c. $f(x) = -15 \iff 2x^2 + 7x - 15 = -15$.1
 $\iff 2x^2 + 7x = 0$
 $\iff x(2x+7) = 0$ équation produit nul
 $\iff x=0$ ou $2x+7=0$
 $\iff x=0$ ou $x=-\frac{7}{2}$

2. a. $g(x) = \left(\frac{1}{2}x-1\right)^2 - \frac{1}{4}x^2 - 16$.1,5
 $= \left(\frac{1}{2}x\right)^2 - 2 \times \frac{1}{2}x + 1^2 - \frac{1}{4}x^2 - 16$
 $= \frac{1}{4}x^2 - x + 1 - \frac{1}{4}x^2 - 16$
 $= -x - 15$

b. La fonction affine g est décroissante car son coefficient directeur $a = -1$ est négatif. 0,5+0,5

3. Soit h une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = x^2 - 16$.

a. $h(x) = x^2 - 4^2 = (x+4)(x-4)$.1

b. $h(x) < 3x - 12 \iff (x-4)(x+4) - 3x + 12 < 0$.1
 $\iff (x-4)(x+4) - 3(x-4) < 0$
 $\iff (x-4)[(x+4) - 3] < 0$
 $\iff (x-4)(x+1) < 0$

c. D'après la question précédente résoudre l'inéquation $h(x) < 3x - 12$ revient à résoudre l'inéquation $(x-4)(x+1) < 0$.

Or on a :

x	$-\infty$	-1	4	$+\infty$
$x-4$		-	- 0 +	
$x+1$		- 0 +		+
$f(x)$		+	0 - 0 +	

Donc $h(x) < 3x - 12$ pour $x \in]-1; 4[$.1

Exercice 5:

2 points

Notons x la longueur AM .

- Le carré de côté $[AM]$ a pour aire x^2 .

- Le triangle isocèle de base $[MB]$ et dont la hauteur à même mesure

que le côté $[AM]$ du carré a pour aire $\frac{(8-x) \times x}{2} = 4x - \frac{x^2}{2}$.

L'aire du carré est-elle égale à celle du triangle pour x solution de l'équation $x^2 = 4x - \frac{x^2}{2}$

Équation qui équivaut à : $\frac{3}{2}x^2 - 4x = 0$ soit encore $x \times \left(\frac{3}{2}x - 4\right) = 0$

Qui a pour solution : • $x = 0$ (les deux aires sont nulles)

• $x = \frac{8}{3}$ (les deux aires valent alors $\frac{64}{9} \text{ cm}^2$)

0.5 essai avec un exemple + 0.5 trouve le bon (même en tâtonnant) + 0.5 équation posée + 0.5 équation résolue

