

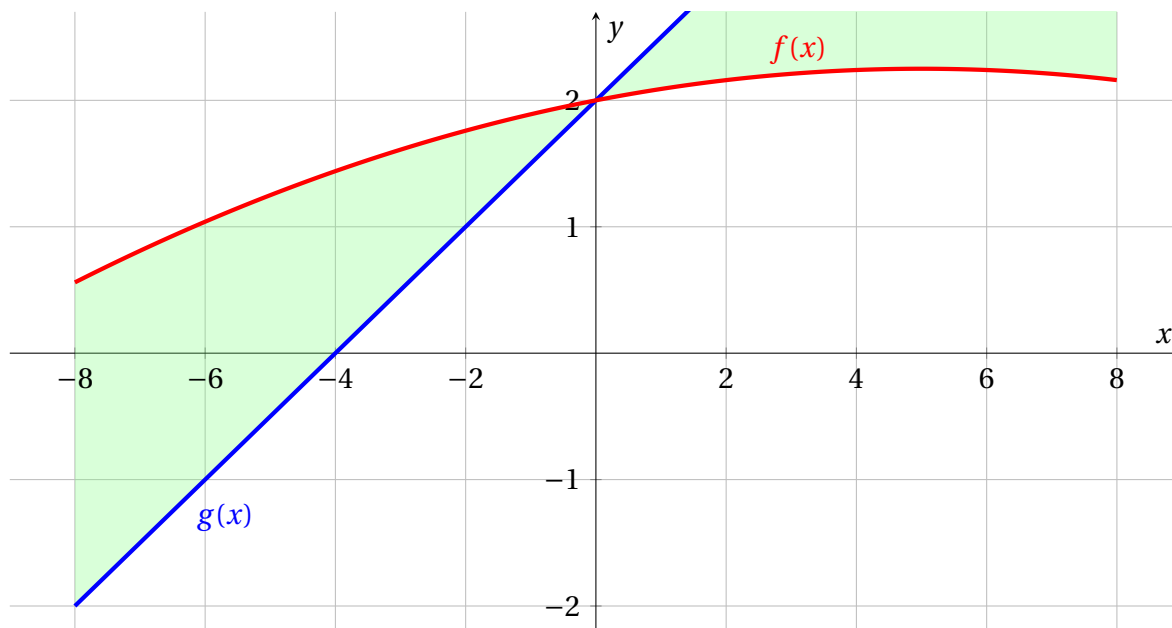
DS de Mathématiques

Durée 1 heure.

Tout au long du devoir rédiger précisément en justifiant à chaque fois.

Exercice 1	Barème	Exercice 2	Barème	Exercice 2	Barème	Communiquer	Barème
1.	/1,5	1.	/1,5	5.	/1	Global	/2
2.	/2	2.	/2	6.	/2		
3.	/2	3.	/1	7.	/2,5		
4.	/1,5	4.	/1				

Exercice 1. (7 points)



- Calculer la valeur approchée de $\int_{-8}^8 f(x) dx$ à l'entier près.
Il y a environ 14 carreaux sous la courbe de $f(x)$ entre -8 et 8. Chaque carreau a une aire de 2 u.a. donc $\int_{-8}^8 f(x) dx \approx 28$ u.a.
- Calculer **en détaillant** la valeur exacte de $\int_{-8}^0 g(x) dx$ puis dessiner ce que cela représente sur le graphique.
L'aire sous la courbe de $g(x)$ entre $x=-4$ et $x=0$ est de 2 carreaux ou 4 u.a. mais elle est compensée par celle entre $x=-8$ et $x=-4$ qui vaut -4 u.a. Au total on a ainsi $\int_{-8}^0 g(x) dx = 0$ u.a.
- Calculer la valeur de la surface verte. La fin n'est pas visible mais la droite bleue continue de la même façon.
Le plus simple pour calculer la surface verte est de calculer en deux temps :
Sur $[-8;0]$ on a $\int_{-8}^0 f(x) dx \approx 11$ u.a. car il y a environ 5,5 carreaux sous la courbe et $\int_{-8}^0 g(x) dx = 0$ u.a. comme déjà vu.

f étant au dessus de g on a ainsi la valeur de la surface verte du côté gauche du graphique :

$$\int_{-8}^0 f(x) dx - \int_{-8}^0 g(x) dx \approx 11$$

Sur [0;8] on a $\int_0^8 f(x) dx \approx 17$ u.a. car il y a environ 8,5 carreaux sous la courbe et $\int_0^8 g(x) dx = \frac{(2+6) \times 8}{2} = 32$ u.a. en utilisant la formule de l'aire d'un trapèze.

Cette fois f est sous g donc on a la valeur de la surface verte du côté gauche du graphique avec : $\int_0^8 g(x) dx - \int_0^8 f(x) dx \approx 32 - 17 \approx 15$ u.a.

La surface totale est donc de $11 + 15 = 26$ u.a.

4. Soient $a(x)$ et $b(x)$ deux fonctions telles que :

$$\int_0^{10} a(x) dx = 50 \quad ; \quad \int_0^8 b(x) dx = 12 \quad ; \quad \int_6^{10} b(x) dx = 5 \quad ; \quad \int_6^8 b(x) dx = 4.$$

Que vaut $\int_0^{10} 2 \times a(x) - 3 \times b(x) dx$?

Commençons par trouver l'intégrale de $b(x)$ entre 0 et 10 :

$$\int_0^{10} b(x) dx = \int_0^8 b(x) dx + \int_6^{10} b(x) dx - \int_6^8 b(x) dx = 12 + 5 - 4 = 13 \text{ u.a.}$$

On a alors : $\int_0^{10} 2 \times a(x) - 3 \times b(x) dx = 2 \times \int_0^{10} a(x) dx - 3 \times \int_0^{10} b(x) dx = 2 \times 50 - 3 \times 13 = 61$ u.a.

Exercice 2. (11 points)

Rappels de formules pour u une fonction et C un nombre réel :

Une primitive de $\frac{u'}{u^2}$ vaut $\frac{-1}{u} + C$.

Une primitive de $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ vaut $2\sqrt{u} + C$.

Une primitive de $u' \times u$ vaut $\frac{u^2}{2} + C$.

1. Calculer la **dérivée** de la fonction $f(x) = 5x^2 - \frac{3}{7}x + 12 + 3\cos(x)$.

$$f'(x) = 10x - \frac{3}{7} - 3\sin(x)$$

2. Calculer une **primitive** de cette même fonction $f(x)$.

$$F(x) = \frac{5x^3}{3} - \frac{3}{7} \frac{x^2}{2} + 12x + 3\sin(x) + C = \frac{5x^3}{3} - \frac{3x^2}{14} + 12x + 3\sin(x) + C \text{ avec } C \text{ un nombre réel.}$$

3. Calculer la **primitive** $F(x)$ de $f(x)$ telle que $F(0) = 10$.

$$F(0) = \frac{5 \times 0^3}{3} - \frac{3 \times 0^2}{14} + 12 \times 0 + 3\sin(0) + C = C$$

Pour avoir $F(0) = 10$ il faut simplement que C soit égal à 10.

4. Calculer la valeur de $\int_0^2 f(x) dx$.

$$\int_0^2 f(x) dx = F(2) - F(0)$$

$$\text{Or } F(2) = \frac{5 \times 2^3}{3} - \frac{3 \times 2^2}{14} + 12 \times 2 + 3\sin(2) + 10 \approx 49,2$$

et $F(0) = 10$

$$\int_0^2 f(x) dx = F(2) - F(0) \approx 49,2 - 10 \approx 39,2 \text{ u.a.}$$

Remarque : En degrés le résultat de $F(2)$ est plutôt 46,58 environ.

5. Calculer la valeur moyenne de $f(x)$ sur $[0;2]$.

$$\text{Cette valeur moyenne vaut } \frac{1}{2-0} \int_0^2 f(x) dx \approx \frac{39,2}{2} \approx 19,6$$

6. Calculer la **primitive** $G(x)$ de $g(x) = \cos(x) \times \sin(x)$ telle que $G(0) = 10$.

Si on pose $u(x) = \sin(x)$ on a $u'(x) = \cos(x)$ et la fonction $g(x)$ est alors de la forme $u' \times u$.

$$\text{Sa primitive vaut } G(x) = \frac{u^2}{2} + C = \frac{\sin(x)^2}{2} + C$$

$$\text{De plus } G(0) = \frac{\sin(0)^2}{2} + C = C. \text{ Il faut donc } C = 10 \text{ pour respecter la condition fixée.}$$

7. Calculer la valeur moyenne de $h(x) = \frac{36}{(12x+1)^2}$ sur $[0;1]$.

Il faut commencer par trouver une primitive de cette fonction. En la transformant un peu comme suit : $h(x) = 3 \times \frac{12}{(12x+1)^2}$ on remarque qu'en prenant $u(x) = 12x+1$ elle a la forme

$\frac{u'}{u^2}$ multiplié par 3. Une primitive est donc :

$$3 \times \frac{-1}{u} + C = 3 \times \frac{-1}{12x+1} + C = \frac{-3}{12x+1} \text{ en choisissant } C = 0 \text{ puisqu'il n'y a pas de condition fixée.}$$

On peut alors calculer la valeur moyenne :

$$\frac{1}{1-0} \int_0^1 h(x) dx = \frac{1}{1-0} \times (H(1) - H(0)) = \frac{-3}{12 \times 1 + 1} - \frac{-3}{12 \times 0 + 1} = \frac{36}{13} \approx 2,77$$