

DS de Mathématiques

Durée 1 heure.

Exercice 1. (6 points)

1. Calculer la moyenne arithmétique de 325 et 2234.

La moyenne arithmétique de ces deux nombres vaut $\frac{325 + 2234}{2} = 1279,5$

2. Calculer la moyenne géométrique de 151 et 16580.

La moyenne géométrique de ces deux nombres vaut $\sqrt{151 \times 16580} \approx 1582,27$

3. Soit (u_n) la suite arithmétique de raison 22 et telle que $u_{34} = 549$.

Que vaut u_0 ?

Que vaut u_{100} ?

Quand la suite aura dépassé 10 000 ?

$$u_0 = u_{34} - r \times 34 = 549 - 22 \times 34 = -199$$

$$u_{100} = u_{34} + r \times 66 = 549 + 22 \times 66 = 2001$$

Posons $u_n > 10000$, on a alors :

$$u_0 + r \times n > 10000$$

$$-199 + 22 \times n > 10000$$

$$22 \times n > 10000 + 199 = 10199$$

$$n > \frac{10199}{22} \approx 463,59$$

C'est donc à partir du terme de rang 464 que la suite dépassera 10 000.

4. Soit (v_n) la suite géométrique telle que $v_6 = 8019$ et $v_8 = 72171$.

Que vaut la raison ?

Que vaut v_0 ?

Que vaut v_{11} ?

On sait que $v_8 = v_6 \times q^2$, on a donc :

$$q^2 = \frac{v_8}{v_6} = \frac{72171}{8019} = 9$$

$$\text{Ainsi } q = \sqrt{9} = 3$$

$$v_0 = v_6 \times q^{-6} = 8019 \times 3^{-6} = 11$$

$$v_{11} = v_8 \times q^3 = 72171 \times 3^3 = 19486197$$

5. Calculer $28 + 112 + 448 + \dots + 7340032$.

C'est une suite géométrique de raison 4. De plus le dernier terme de cette somme est $7340032 = 28 \times 4^9$ ce qui correspond au terme de rang 9.

On utilise la formule de la somme d'une suite géométrique :

$$\text{Somme} = 28 \frac{1 - 4^{9+1}}{1 - 4} = 9786700$$

Exercice 2. (12 points)

Au 31 décembre 2020, une plateforme de jeux en ligne sur abonnement compte 20,16 millions d'abonnés. Cette plateforme souhaite anticiper l'évolution du nombre d'abonnés dans les années futures. D'après une étude menée au cours des années précédentes, on peut admettre que le nombre d'abonnés augmente de 14 % par an.

1. Quel serait alors, avec ce modèle, le nombre d'abonnés au 31 décembre 2021 ?
 $20,16 \times 1,14 = 22,9824$ c'est à dire 22 982 400 abonnés.
2. Expliquer pourquoi on peut modéliser cette situation avec une suite géométrique.
Une hausse de 14% correspond à une multiplication par 1,14. On multiplie ainsi à chaque étape par la même valeur : 1,14.
3. Donner la raison et le premier terme (u_0) de cette suite.
Comme vu précédemment la raison est de 1,14, le premier terme est donné dans l'énoncé : 20,16
4. Déterminer l'expression de u_{n+1} en fonction de u_n .
 $u_{n+1} = u_n \times 1,14$
5. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n .
 $u_n = 20,16 \times 1,14^n$
6. Calculer le nombre d'abonnés prévu au 31 décembre de l'année 2030. On arrondira la réponse au million.
Décembre 2030 correspond au terme de rang 10 :
 $u_{10} = 20,16 \times 1,14^{10} \approx 74,7$ soit environ 75 millions.
7. Calculer u_5 . Que représente ce nombre dans le contexte de l'exercice ?
 $u_5 = 20,16 \times 1,14^5 \approx 38,816$ représente le nombre d'abonnés en 2025.
8. Chaque abonnement est annuel et rapporte 5€ à la plateforme. Combien peut-elle espérer gagner entre 2020 et 2030 inclus ?
Pour avoir le nombre d'abonnement total il faut faire une somme de u_0 à u_{10} :
 $u_0 + u_1 + \dots + u_{10} = 20,16 \frac{1 - 1,14^{10+1}}{1 - 1,14} \approx 464,577451$
Ces 464 577 451 abonnements au total auront donc rapporté $464577451 \times 5 = 2\,322\,887\,255$ €
9. Compléter la fonction `abonnes()` définie ci-dessous en langage Python afin qu'elle renvoie la première année où le nombre d'abonnés à la plateforme dépassera 100 millions et donner la valeur que renvoie ce programme.

```
def abonnes():  
    u=20,16..  
    n=0  
    while u < 100 :  
        u=u*1.14  
        n=n+1  
    return n
```

Cette valeur est dépassée en 2033 :

$$u_{12} \approx 97$$

$$u_{13} \approx 111$$