

DS de Mathématiques

Durée 1 heure.

Exercice 1. (7 points)

1. Donner la dérivée de la fonction $f(x) = \ln(3x^2 - 15x + 8)$.

$\ln(u)$ a pour dérivée $\frac{u'}{u}$ donc $f'(x) = \frac{6x - 15}{3x^2 - 15x + 8}$

2. Donner une primitive de la fonction $g(x) = \frac{8x}{4x^2 + 1}$.

On remarque que $8x$ est la dérivée de $4x^2 + 1$. Cette fonction est donc de la forme $\frac{u'}{u}$, une de ses primitive est $\ln(u) = \ln(4x^2 + 1)$

3. La fonction $20 \times \ln(-7x + 28)$ est croissante ou décroissante ?

$-7x + 28$ est une fonction affine décroissante. Le logarithme ne change pas l'ordre et multiplier par 20 non plus donc cette fonction est décroissante.

4. La fonction $-7 \times \ln(0,2x - 1)$ est croissante ou décroissante ?

$0,2x - 1$ est une fonction affine croissante. Le logarithme ne change pas l'ordre et multiplier par 20 non plus donc cette fonction est décroissante.

5. Résoudre $200 \times 0,95^x < 70$ en donnant la valeur exacte puis la valeur approchée à 10^{-1} .

$$\Leftrightarrow 0,95^x < 70/200 \quad \Leftrightarrow 0,95^x < 0,35 \quad \Leftrightarrow \ln(0,95^x) < \ln(0,35)$$

$$\Leftrightarrow x \times \ln(0,95) < \ln(0,35) \quad \Leftrightarrow x > \frac{\ln(0,35)}{\ln(0,95)}$$

Ce sera donc pour x plus grand strictement que $\frac{\ln(0,35)}{\ln(0,95)} \approx 20,5$

6. Compléter les pointillés $\log(5) + \log(125) - \log(25) = \dots \log(5)$

$$= \log(5) + \log(5^3) - \log(5^2) = \log(5) + 2\log(5) - 2\log(5) = 2\log(5)$$

7. Simplifier comme ci-dessus : $5\log\left(\frac{1}{5}\right) - 3\log(\sqrt{125}) + 2\log(15^2) = \dots$

$$5\log\left(\frac{1}{5}\right) - 3\log(\sqrt{125}) + 2\log(15^2) = 5\log(5^{-1}) - 3\log(125^{0,5}) + 2\log((3 \times 5)^2)$$

$$= -5\log(5) - 1,5\log(125) + 4\log(3 \times 5) = -5\log(5) - 1,5\log(5^3) + 4\log(3) + 4\log(5)$$

$$= -5\log(5) - 4,5\log(5) + 4\log(3) + 4\log(5) = -5,5\log(5) + 4\log(3)$$

Exercice 2. (5 points)

Une ville ayant 200 milliers d'habitants en janvier 2024 a une population qui augmente de 2% par an.

1. Quelle sera la population en janvier 2025 ? Et en janvier 2026 ?

En 2025 il y aura $200 \times 1,02 = 204$ milliers d'habitants.

En 2026 il y aura $204 \times 1,02 = 208,08$ milliers d'habitants.

2. Donner l'expression permettant de calculer la population lors de l'année $2024+n$.
On multiplie par 1,02 à chaque étape donc c'est une suite géométrique : $u_n = 200 \times 1,02^n$

3. En quelle année cette ville atteindra 300 milliers d'habitants? Justifier.
On veut $u_n = 300$

$$\text{Donc } 200 \times 1,02^n = 300$$

$$\Leftrightarrow 1,02^n = 1,5$$

$$\Leftrightarrow \ln(1,02^n) = \ln(1,5)$$

$$\Leftrightarrow n \times \ln(1,02) = \ln(1,5)$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{\ln(1,5)}{\ln(1,02)} \approx 20,48$$

Ce sera donc lors de la vingtième année, que cela arrivera donc lors de l'année 2044 ou début 2045.

4. Compléter l'algorithme ci-dessous afin qu'il calcule et affiche la réponse à la question précédente.

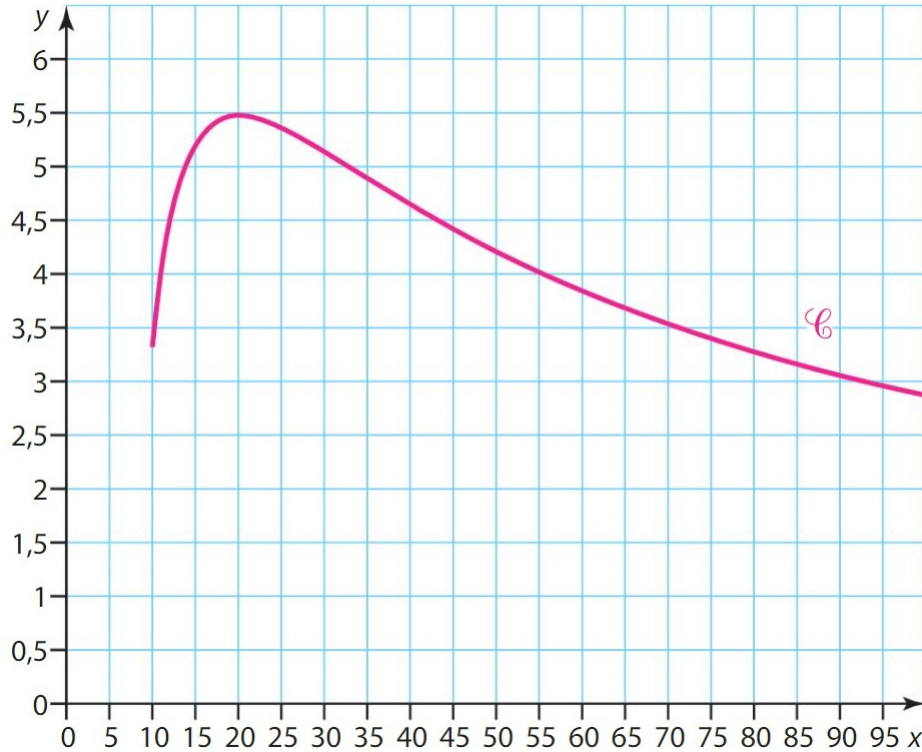
```
a=200
b=0
while a<300 :
    a= a*1.02
    b= b+1
print(b)
```

Exercice 3. (6 points)

La capacité pulmonaire d'une personne est la quantité d'air (mesurée en litres) pouvant être inspirée. Dans le cas d'une inspiration forcée, à partir de 10 ans, la capacité pulmonaire (en litres) d'une personne peut être modélisée en fonction de son âge x (en années) par la fonction f définie par :

$$\frac{110(\ln x - 2)}{x}$$

On donne ci-après la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[10; 100]$ dans un repère orthogonal.



1. A quel âge la capacité pulmonaire est maximale et quelle est cette capacité?

À 20 ans environ avec une capacité pulmonaire de 5,5L.

2. A partir de quel âge la capacité pulmonaire devient inférieure à celle d'un enfant de 10 ans?

À partir de 75 ans environ avec une capacité pulmonaire qui passe sous les 3,5L.

3. Vérifier que : $f'(x) = \frac{110(3 - \ln x)}{x^2}$

$f(x) = \frac{110(\ln x - 2)}{x}$ est de la forme $\frac{u}{v}$ avec :

$$u = 110(\ln x - 2) = 110\ln x - 220$$

$$u' = \frac{110}{x}$$

$$v = x$$

$$v' = 1$$

$$\text{Ainsi } f'(x) = \frac{u'v - v'u}{v^2} = \frac{\frac{110}{x} \times x - 1 \times (110\ln x - 220)}{x^2} = \frac{110 - 110\ln x + 220}{x^2} = \frac{330 - 110\ln x}{x^2}$$

$$= \frac{110(3 - \ln x)}{x^2}$$

4. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[10; 100]$.

On commence par étudier le signe de $f'(x)$. x^2 étant strictement positif sur l'ensemble de définition ainsi que 110 on peut se contenter d'étudier le signe de ce qui reste : $3 - \ln x$

$$3 - \ln x > 0 \quad \Leftrightarrow -\ln x > -3 \quad \Leftrightarrow \ln x < 3 \quad \Leftrightarrow e^{\ln x} < e^3 \quad \Leftrightarrow x < e^3$$

D'où :

x	10	e^3	100
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$f(10)$	$f(e^3)$	$f(100)$

5. Déterminer la valeur exacte du maximum de f puis la valeur arrondie à 10^{-3} .

Le maximum est atteint pour $x = e^3$ donc sa valeur est :

$$f(e^3) = \frac{110(\ln e^3 - 2)}{e^3} = \frac{110(3 - 2)}{e^3} = \frac{110}{e^3} \approx 5,477 \text{ L.}$$