

DS de Mathématiques

Durée 1 heure.

Exercice 1. (9 points)

Pour chaque nombre complexe ci dessous donner, en expliquant, sa partie réelle, sa partie imaginaire, son module et un argument.

1. $z_1 = 5 + 5i$

2. $z_2 = 1 - \sqrt{3}i$

3. $z_3 = 5e^{i\frac{15\pi}{6}}$

On range les résultats dans un tableau. Voici les données trouvables directement dans l'énoncé :

	Re(z)	Im(z)	r	θ
z_1	5	5		
z_2	1	$-\sqrt{3}$		
z_3			5	$\frac{15\pi}{6}$

Pour le reste il faut changer de forme.

· Le module de z_1 vaut $\sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50}$

Un argument de z_1 vaut $\arccos\left(\frac{5}{\sqrt{50}}\right) = \frac{\pi}{4}$ ou $-\frac{\pi}{4}$.

$\frac{\pi}{4}$ est la bonne réponse car la partie imaginaire est positive.

· Le module de z_2 vaut $\sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$

Un argument de z_2 vaut $\arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$ ou $-\frac{\pi}{3}$.

$-\frac{\pi}{3}$ est la bonne réponse car la partie imaginaire est négative.

· $z_3 = 5\left(\cos\left(\frac{15\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{15\pi}{6}\right)\right) = 5(1 + 0i) = 5$

	Re(z)	Im(z)	r	θ
z_1	5	5	$\sqrt{50}$	$\frac{\pi}{4}$
z_2	1	$-\sqrt{3}$	2	$-\frac{\pi}{3}$
z_3	5	0	5	$\frac{15\pi}{6}$

Exercice 2. (5 points)

Résoudre les équations ci dessous, avec z un nombre complexe.

1. $z^2 = 25$

Posons $z = re^{\theta i}$. On a alors $z^2 = r^2 e^{2\theta i}$.

Or $25 = 25e^{0i}$. On en déduit $\theta = 0$ et $r^2 = 25$ donc $r = 5$ ou -5 .

Ainsi $z = 5$ ou $z = -5$.

2. $z^2 = 5i$

Posons $z = re^{\theta i}$. On a alors $z^2 = r^2 e^{2\theta i}$.

Or $5i = 5e^{\frac{\pi}{2}i}$. On en déduit $2\theta = \frac{\pi}{2}$ donc $\theta = \frac{\pi}{4}$ et $r^2 = 5$ donc $r = \sqrt{5}$ ou $-\sqrt{5}$.

Ainsi $z = \sqrt{5}e^{\frac{\pi}{4}i}$ ou $z = -\sqrt{5}e^{\frac{\pi}{4}i}$.

3. $z + \bar{z} = 0$

Posons $z = a + bi$. On a alors $z + \bar{z} = a + bi + a - bi = 2a$.

On en déduit $2a = 0$ donc $a = 0$.

z est un imaginaire pur, il vaut bi uniquement.

Exercice 3. (4 points)

Soient deux nombres complexes :

$a = -3 + \sqrt{3} \times i$ affixe du point A et $b = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ affixe du point B.

1. O étant le point de coordonnées (0;0). Est ce que ABO est rectangle?

Mettons a sous forme exponentielle :

Son module vaut : $\|a\| = \sqrt{(-3)^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{12}$.

Son argument vaut $\arg(a) = \cos\left(\frac{-3}{\sqrt{12}}\right) = \frac{5\pi}{6}$ car la partie imaginaire de a est positive.

Ainsi $a = \sqrt{12}e^{i\frac{5\pi}{6}}$

On remarque alors que l'angle entre (OB) et (OA) vaut exactement $\frac{\pi}{2}$. En effet $\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{6}$

Le triangle ABO est donc rectangle en O.

2. Est ce que ABO est isocèle?

D'après l'énoncé la longueur de OB est le module de b , c'est à dire 2.

La longueur de OA vaut le module de a , c'est à dire $\sqrt{12}$.

Pour la longueur AB on commence par mettre b sous forme algébrique :

$b = 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 2(\cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3)) = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + i\sqrt{3}$.

On calcule $b - a = 1 + i\sqrt{3} + 3 - i\sqrt{3} = 4$

La longueur AB vaut donc 4. Ce triangle n'est pas isocèle.

