

Épreuve de remplacement de mathématiques – Corrigé Terminale STI2D – Durée 2h – Calculatrice autorisée		
Enseignants : HALTER N., SECHER P. Date : 19/04/2024	Nom : Prénom : Classe :	Note :

Sujet de 3 pages à rendre avec la copie

Exercice 1 :

7,5 points

La production de déchets polluants d'une entreprise de Travaux Publics était de 22 500 tonnes en 2008 et n'a fait qu'augmenter depuis, pour atteindre 29 000 tonnes en 2019.

Depuis 2008, en raison de normes anti-pollution, la production de déchets polluants de l'entreprise est sanctionnée par une amende si elle dépasse 21 000 tonnes par an.

Plus précisément, chaque année, l'entreprise doit payer une amende si la production de déchets polluants dépasse 21 000 tonnes, et cette amende augmente de 5 000 euros par an.

En 2008, l'entreprise a payé 26 500 euros d'amende.

- On modélise le montant des amendes payées par l'entreprise à l'aide d'une suite (u_n) où u_n représente l'amende payée en $(2008 + n)$.

Ainsi, $u_0 = 26500$.

- Calculer le montant de l'amende payée par l'entreprise en 2009 et 2010.

$u_1 = 26500 + 5000 = 31500$ euros en 2009 et $u_2 = 31500 + 5000 = 36500$ euros en 2010.

- Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Justifier.

On précisera sa raison.

Chaque année on ajoute 5 000 euros au montant précédent : $u_{n+1} = u_n + 5000$.

La suite (u_n) est donc arithmétique de raison $r = 5000$ et de premier terme $u_0 = 26500$.

- En raison des montants d'amende très importants, l'entreprise décide de réduire sa production de déchets polluants de 5 % par an à partir de 2020.

Pour n un entier naturel supérieur ou égal à 0, on note v_n la quantité de déchets polluants rejetée en $(2020 + n)$.

Ainsi, $v_0 = 29000$.

- Calculer la production de déchets polluants de l'entreprise en 2021.

$v_1 = 29000 \times \left(1 - \frac{5}{100}\right) = 29000 \times 0,95 = 27550$ tonnes.

- Justifier que pour tout entier naturel n : $v_{n+1} = 0,95 v_n$.

Baisser de 5 % revient à multiplier par $1 - \frac{5}{100} = 0,95$, donc chaque année $v_{n+1} = 0,95 v_n$.

- Préciser la nature de la suite (v_n) et exprimer v_n en fonction de n .

(v_n) est géométrique de raison $q = 0,95$ et de premier terme $v_0 = 29000$, donc $v_n = 29000 \times 0,95^n$.

- Le dirigeant de l'entreprise affirme qu'à partir de 2027 l'entreprise ne paiera plus d'amende. Justifier son affirmation.

En 2026 ($n = 6$) : $v_6 = 29000 \times 0,95^6 \approx 21318 > 21000$.

En 2027 ($n = 7$) : $v_7 = 29000 \times 0,95^7 \approx 20252 < 21000$.

La suite étant décroissante, à partir de 2027 la production reste inférieure à 21 000 tonnes : il n'y a plus d'amende.

- Quelle sera entre 2008 et 2026 compris, le montant total des amendes versées par cette entreprise?

De 2008 à 2026, l'entreprise paie une amende chaque année, soit les termes u_0 à u_{18} (19 termes).

$u_{18} = 26500 + 18 \times 5000 = 116500$.

$S = 19 \times \frac{u_0 + u_{18}}{2} = 19 \times \frac{26500 + 116500}{2} = 1358500$ euros.

Exercice 2 :

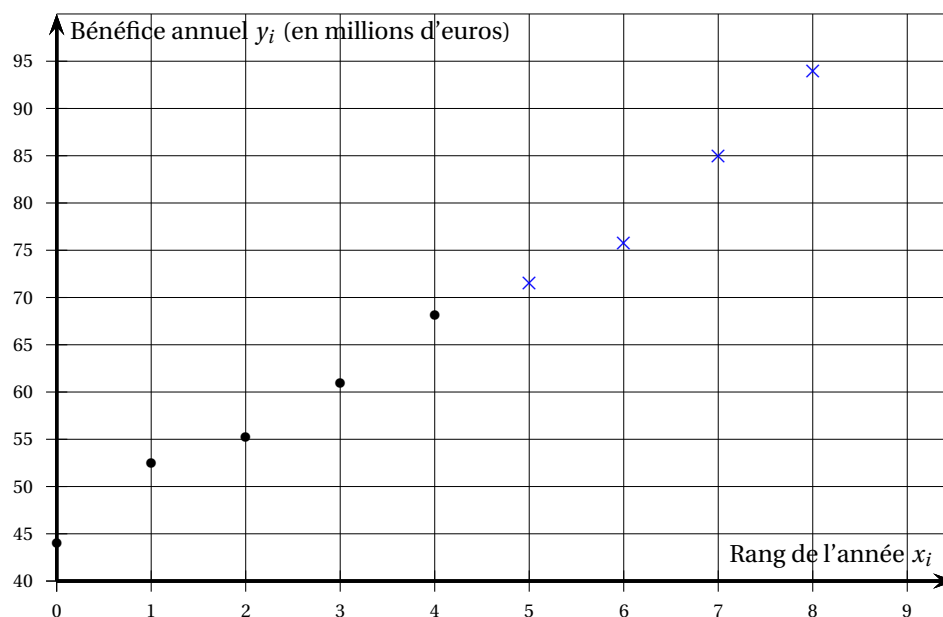
4,5 points

Les bénéfices annuels, en millions d'euros pour les années 2002 à 2010, d'une entreprise spécialisée dans la sécurité informatique sont donnés dans le tableau suivant.

Année	2015	2016	2017	2018	20019	2020	2021	2022	2023
Rang x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Bénéfice annuel y_i (en millions d'euros)	44	52,5	55,3	61	68,1	71,5	75,8	85	94

1. Compléter le nuage de points associé à la série des bénéfices annuels de 2015 à 2023;

Points à placer : (5; 71,5), (6; 75,8), (7; 85) et (8; 94) (en bleu sur le graphique).



2. À l'aide de la calculatrice, donner une équation de la droite (d) d'ajustement de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés.

Arrondir les coefficients au millième.

La calculatrice donne $y = 5,817x + 44,2$ (coefficients arrondis au millième).

3. Pour la suite, on admettra que la droite (d_2) a pour équation $y = 5,82x + 44,2$.

- (a) Déterminer le bénéfice annuel que peut espérer l'entreprise en 2024.

2024 correspond au rang $x = 9$: $y = 5,82 \times 9 + 44,2 = 96,58$. L'entreprise peut espérer environ 96,6 millions d'euros.

- (b) Déterminer à partir de quelle année l'entreprise peut espérer un bénéfice annuel de plus de 200 millions d'euros.

$$5,82x + 44,2 > 200 \iff 5,82x > 155,8 \iff x > \frac{155,8}{5,82} \approx 26,8.$$

Donc $x = 27$: à partir de 2015 + 27 = 2042.

Exercice 3 :

3 points

Dans une ville, 10 000 vélos sont mis en service en même temps. On estime qu'en raison des accidents, des dégradations et des problèmes techniques, 6 % de ces vélos sont retirés de la circulation chaque année (régulièrement au fil des mois).

On choisit de modéliser cette situation par la fonction f , qui pour x , exprimé en nombre entier d'années, donne le nombre de vélos restant en circulation. On a donc : $f(x) = 10000 \times 0,94^x$.

1. Combien de vélos sont toujours en circulation au bout de 18 mois?

18 mois = 1,5 an : $f(1,5) = 10000 \times 0,94^{1,5} \approx 9114$ vélos.

2. On veut savoir au bout de combien de temps le nombre de vélos en circulation deviendra inférieur à 2 000.

- (a) Montrer que cette question revient à résoudre l'inéquation $0,94^x \leq 0,2$.

$$f(x) \leq 2000 \iff 10000 \times 0,94^x \leq 2000 \iff 0,94^x \leq \frac{2000}{10000} \iff 0,94^x \leq 0,2.$$

- (b) Déterminer finalement, selon ce modèle, la durée minimale (en année et en mois) pour qu'il reste moins de 2 000 vélos en circulation.

$$0,94^x \leq 0,2 \iff x \ln(0,94) \leq \ln(0,2) \iff x \geq \frac{\ln(0,2)}{\ln(0,94)} \approx 26,01 \text{ (on change le sens car } \ln(0,94) < 0).$$

0,01 an $\approx$ 0,13 mois : il faut donc 26 ans et 1 mois environ.

Exercice 4 :

5 points

Partie A

Les stylos utilisés par une entreprise sont fabriqués par deux ateliers A1 et A2.

L'atelier A1 fabrique 60 % des stylos de cette entreprise, et 5 % de ceux-ci possèdent un défaut de fabrication.

De plus, 2,5 % des stylos sortant de l'atelier A2 ont un défaut.

Un stylo est prélevé au hasard dans le stock de l'entreprise.

On considère les événements :

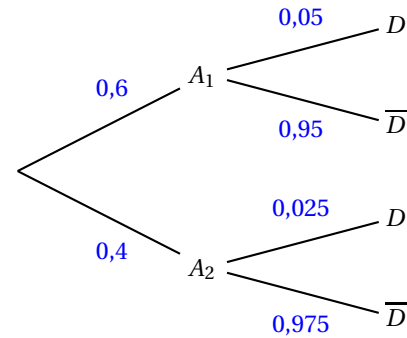
A1 : « Le stylo a été fabriqué par l'atelier A1 ».

A2 : « Le stylo a été fabriqué par l'atelier A2 ».

D : « Le stylo possède un défaut de fabrication »

1. Compléter l'arbre de probabilité ci-contre :
2. Calculer la probabilité qu'un stylo provienne de l'atelier A1 et possède un défaut de fabrication.
 $P(A_1 \cap D) = 0,6 \times 0,05 = 0,03$.
3. Justifier que la probabilité qu'un stylo possède un défaut de fabrication est de 0,04.

D'après la formule des probabilités totales : $P(D) = P(A_1 \cap D) + P(A_2 \cap D) = 0,03 + 0,4 \times 0,025 = 0,03 + 0,01 = 0,04$.

**Partie B**

Dans cette partie, on suppose que 4 % des stylos possèdent un défaut de fabrication.

L'entreprise confectionne des paquets contenant chacun 10 stylos.

On appelle X la variable aléatoire donnant pour un paquet le nombre de stylos qui possèdent un défaut de fabrication.

1. Expliquer pourquoi la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
On répète 10 fois, de manière identique et indépendante (stock assez grand pour assimiler le choix à un tirage avec remise), une épreuve de Bernoulli dont le succès « le stylo a un défaut » a pour probabilité $p = 0,04$.
X compte le nombre de succès : X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(10; 0,04)$.
2. Calculer la probabilité qu'il y ait au plus 2 stylos possédant un défaut dans un paquet de 10 stylos.
 $P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \approx 0,994$ (calculatrice).