

DS de Mathématiques

Durée 1 heure.

Exercice 1. (8 points)

Calculer la **dérivée** de chacune des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = e^{7x^2-3x+1}$
 $f_1'(x) = (14x - 3)e^{7x^2-3x+1}$

2. $f_2(x) = \sin(\cos(x))$
 $f_2'(x) = \sin(x) \cos(\cos(x))$

3. $f_3(x) = \ln(\sqrt{x})$
 $f_3'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2x}$

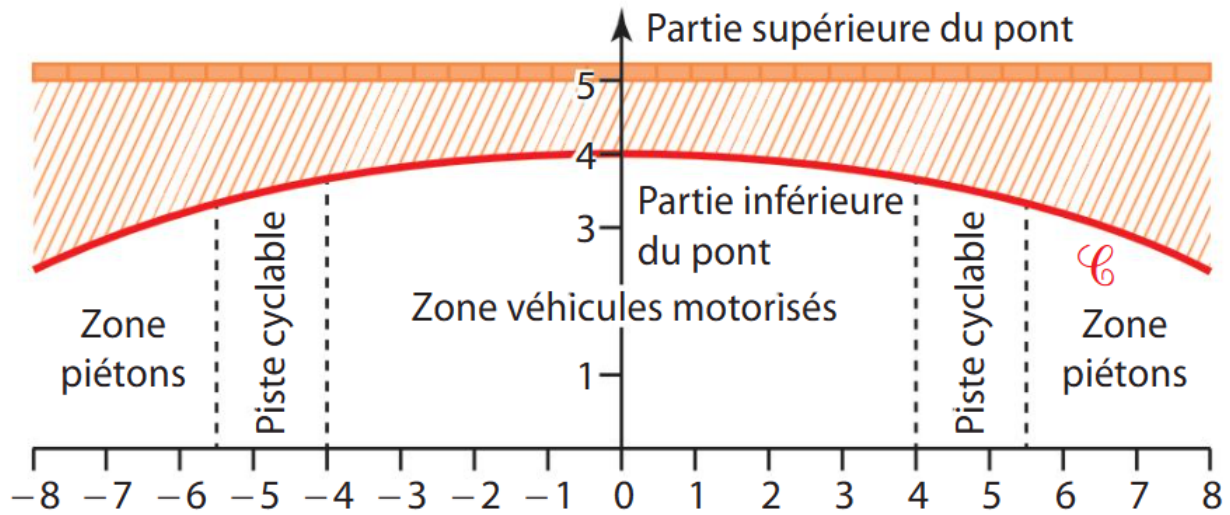
Pour chacune des fonctions suivantes calculer la **primitive** F telle que $F(1) = 10$:

4. $f_4(x) = e^{12x-3} + 5$
 $F_4(x) = \frac{e^{12x-3}}{12} + 5x + C$
De plus $F_4(1) = \frac{e^{12-3}}{12} + 5 + C = 10 \iff C = 10 - \frac{e^9}{12} - 5$

5. $f_5(x) = 2 \sin(5x - 3)$
 $F_5(x) = \frac{2 \sin(5x - 3)}{5} + C$
De plus $\frac{2 \sin(5 - 3)}{5} + C = 10 \iff C = 10 - \frac{2 \sin(2)}{5}$

Exercice 2. (10 points)

Un pont à une seule arche, et d'une longueur de 16 mètres, enjambe une route à double circulation. Dans un repère orthonormé, la figure ci-dessous représente une vue de l'une des deux façades de ce pont.



La partie supérieure du pont est à une hauteur de 5 mètres au-dessus de la route.

La partie de l'axe des abscisses comprises entre -8 et +8 représente la chaussée sur laquelle sont délimitées les zones de circulation des piétons, des cyclistes et des véhicules motorisés. Soit la fonction f définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $[-8;8]$ par :

$$f(x) = a - \frac{e^{0,2x} + e^{-0,2x}}{2}$$

où a désigne un nombre entier naturel.

1. Déterminer graphiquement $f(0)$. En déduire que $a = 5$.

$$f(0) = 4, \text{ or } f(0) = a - \frac{e^{0,2 \times 0} + e^{-0,2 \times 0}}{2} = a - \frac{1+1}{2} = a - 1 \iff a = 4 + 1 = 5$$

2. Montrer que la fonction f' , fonction dérivée de la fonction f , est définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $[-8;8]$ par :

$$f'(x) = \frac{1}{10} e^{-0,2x} (1 - e^{0,4x})$$

$$f'(x) = -\frac{0,2e^{0,2x} - 0,2e^{-0,2x}}{2} = -\frac{e^{0,2x} - e^{-0,2x}}{10} = \frac{1}{10} (e^{-0,2x} - e^{0,2x}) = \frac{1}{10} e^{-0,2x} (1 - e^{0,4x})$$

3. Calculer $f'(0)$. En déduire une équation de la tangente à la courbe en son point d'abscisse 0.

$$f'(0) = \frac{1}{10} e^{-0,2 \times 0} (1 - e^{0,4 \times 0}) = \frac{1}{10} 1(1 - 1) = 0$$

$$\text{La tangente a pour équation : } y = f'(0)x + f(0) = 0x + 4 = 4$$

4. Résoudre $f'(x) > 0$.

$$f'(x) > 0 \iff \frac{1}{10} e^{-0,2x} (1 - e^{0,4x}) > 0 \iff 1 - e^{0,4x} > 0 \text{ car } e^{-0,2x} \text{ est positif.}$$

$$\text{Ainsi } f'(x) > 0 \iff -e^{0,4x} > -1 \iff e^{0,4x} < 1 \iff 0,4x < \ln(1) \iff 0,4x < 0 \iff x < 0$$

5. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[-8;8]$.

x	-8	0	8
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$\approx 2,42$	4	$\approx 2,42$

6. Quelle hauteur maximale peut avoir un véhicule motorisé pour qu'il puisse passer sous ce pont en tenant compte du fait que l'on doit laisser une hauteur de sécurité de 50 cm au-dessus du véhicule?

Le véhicule peut aller jusqu'à $f(4) \approx 3,6626$ (ou $f(-4)$ de l'autre côté), c'est à cet endroit là que le pont est le plus bas. Ainsi la hauteur maximale du véhicule doit être de 3,1626 m

7. Déterminer la primitive de f qui s'annule pour $x = 0$.

$$F(x) = 5x - \frac{e^{0,2x}}{0,2 \times 2} - \frac{e^{-0,2x}}{2 \times (-0,2)} + C = 5x - \frac{e^{0,2x}}{0,4} + \frac{e^{-0,2x}}{0,4} + C$$

$$\text{Or } F(0) = 5 \times 0 - \frac{e^{0,2 \times 0}}{0,4} + \frac{e^{-0,2 \times 0}}{0,4} + C = 0 - \frac{1}{0,4} + \frac{1}{0,4} + C = C \text{ donc } C = 0.$$