

DS de Mathématiques

Durée 1 heure.

Exercice 1. (6 points)

Compléter les dans les égalités ci dessous. a est un nombre positif inconnu.

1. $\log(a^3) + 2\log(a) = \dots \log(a)$

$$\log(a^3) + 2\log(a) = 3\log(a) + 2\log(a) = 5\log(a)$$

2. $\log(21a) + \log(7a) - \log(a) = \dots \log(3) + \dots \log(7) + \dots \log(a)$

$$\log(21a) + \log(7a) - \log(a) = \log(3 \times 7 \times a) + \log(7 \times a) - \log(a) = \log(3) + \log(7) + \log(a) + \log(7) + \log(a) - \log(a) = 1\log(3) + 2\log(7) + 1\log(a)$$

Résoudre les équations suivantes :

3. $3 \times 2^x = 6144$

$$3 \times 2^x = 6144 \iff 2^x = \frac{6144}{3} = 2048 \iff \log(2^x) = \log(2048) \iff x\log(2) = \log(2048) \iff x = \frac{\log(2048)}{\log(2)} = 11$$

4. $5 \times 3^x - 1500 = 96915$

$$5 \times 3^x - 1500 = 96915 \iff 5 \times 3^x = 96915 + 1500 = 98415 \iff 3^x = \frac{98415}{5} = 19683 \iff \log(3^x) = 19683 \iff x\log(3) = \log(19683) \iff x = \frac{\log(19683)}{\log(3)} = 9$$

Exercice 2. (4 points)

On s'intéresse à l'évolution au cours du temps du prix d'un article de consommation courante. On note x le nombre d'années écoulées après le 1er janvier 2020. On décide de modéliser l'évolution du prix de cet article par la fonction f définie par :

$$f(x) = 82 \times 1,055^x$$

1. En utilisant ce modèle, estimer le prix en euros, arrondi à l'unité, de l'article le 1er janvier 2021 puis le 1er juillet 2021.

Le premier janvier 2021 correspond à $x = 1$ année écoulée. Ainsi le prix en euros serait de $f(1) = 82 \times 1,055^1 = 86,51 \approx 87$ €, arrondi à l'unité.

Le premier juillet 2021 correspond à $x = 1,5$. Ainsi le prix en euros serait de $f(1,5) = 82 \times 1,055^{1,5} \approx 89$ €, arrondi à l'unité.

2. En utilisant ce modèle, au cours de quelle année l'article coûtera-t-il plus de 200 € ? Justifier soigneusement en expliquant votre raisonnement.

$$\text{On cherche } f(x) > 200 \text{ ce qui donne } 82 \times 1,055^x > 200 \iff 1,055^x > \frac{200}{82} \iff \log(1,055^x) >$$

$$\log\left(\frac{200}{82}\right) \iff x\log(1,055) > \log\left(\frac{200}{82}\right) \iff x > \frac{\log\left(\frac{200}{82}\right)}{\log(1,055)} \approx 16,65 \text{ C'est à dire après la 16ème année écoulée, durant la 17ème. Cela correspond à 2037.}$$

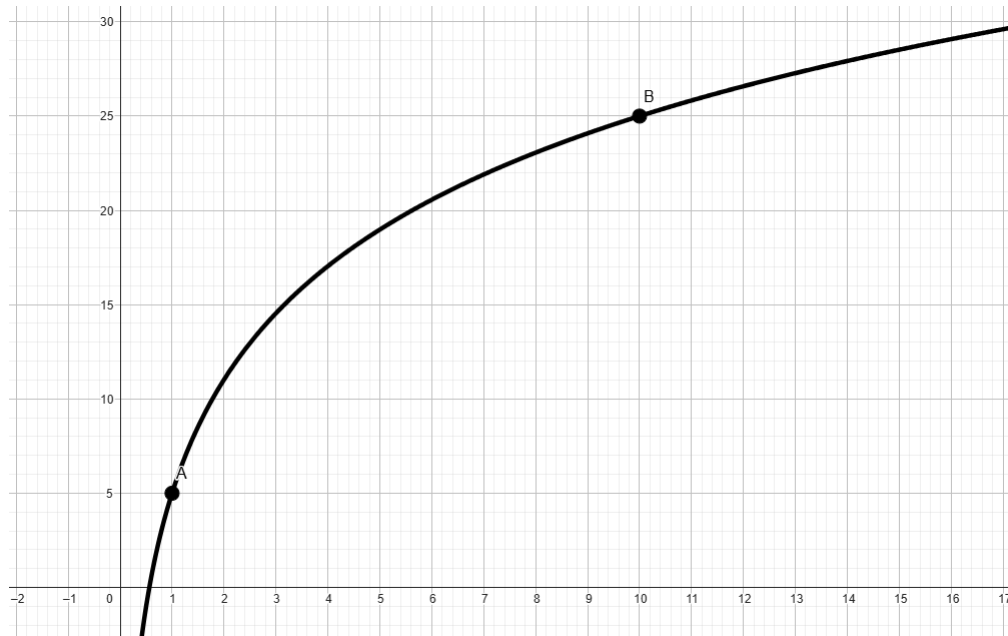
Exercice 3. (8 points)

Sur le graphique ci-dessous, $\mathcal{C}$ est la courbe représentative d'une fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par une expression de la forme :

$$f(x) = a \log(x) + b$$

où $\log$ désigne le logarithme décimal et où a et b sont des constantes réelles.

Les coordonnées des points A et B, qui appartiennent à la courbe $\mathcal{C}$, sont des nombres entiers.



1. Lire sur le graphique ci-contre les coordonnées du point A et en déduire que b est égal à 5.
 A a pour coordonnées $(1; 5)$. Ainsi $f(1) = 5$. Or $f(1) = a \log(1) + b = a \times 0 + b = b$. D'où $b = 5$.
2. Donner, par lecture graphique, la valeur de $f(10)$ et en déduire la valeur de a .
Graphiquement on voit que $f(10) = 25$, c'est l'emplacement du point B. Or $f(10) = a \log(10) + b = a \times 1 + 5 = a + 5$. Si $a + 5 = 25$ alors $a = 20$.

On admet désormais que, pour tout $x > 0$, $f(x) = 20 \log(x) + 5$.

3. Résoudre, dans l'intervalle $]0; +\infty[$, l'équation $f(x) = 20$.
$$f(x) = 20 \iff 20 \log(x) + 5 = 20 \iff 20 \log(x) = 20 - 5 = 15 \iff \log(x) = \frac{15}{20} = 0,75 \iff x = 10^{0,75} \approx 5,6$$
4. Vérifier que, pour tout $x > 0$, $f(10x) = f(x) + 20$.
$$f(10x) = 20 \log(10x) + 5 = 20(\log(10) + \log(x)) + 5 = 20(1 + \log(x)) + 5 = 20 + 20 \log(x) + 5 = 20 + f(x)$$
5. Pour tout réel $x > 0$, exprimer $f(1000x)$ en fonction de $f(x)$.
$$f(1000x) = 20 \log(1000x) + 5 = 20(\log(1000) + \log(x)) + 5 = 20(3 + \log(x)) + 5 = 60 + 20 \log(x) + 5 = 60 + f(x)$$