

Épreuve Anticipée de Mathématiques

Corrigé

PREMIÈRE PARTIE : AUTOMATISMES – QCM (6 pts)

1. **B.** Le nouveau loyer est

$$650 \times 1,04 = 676.$$

2. **B.** La part du temps libre consacrée à la natation est

$$40\% \times 60\% = 0,4 \times 0,6 = 0,24 = 24\%.$$

3. **B.** Deux baisses de 10% correspondent à multiplier deux fois par 0,9 :

$$0,9 \times 0,9 = 0,81.$$

4. **B.** On utilise la règle

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}.$$

Donc

$$\frac{6^5}{6^2} = 6^3.$$

5. **A.** L'épaisseur d'un cheveu vaut

$$7 \times 10^{-2} \text{ mm} = 0,07 \text{ mm}.$$

Pour 3 000 cheveux :

$$3000 \times 0,07 = 210 \text{ mm} = 21 \text{ cm}.$$

6. **D.** Comparons les distances :

$$384 \times 10^3 = 3,84 \times 10^5, \quad 14960 \times 10^4 = 1,496 \times 10^8,$$

$$2254 \times 10^5 = 2,254 \times 10^8, \quad 6283 \times 10^5 = 6,283 \times 10^8.$$

La plus grande est celle de la Terre à Jupiter.

7. **B.** Suite arithmétique :

$$u_5 = u_0 + 5r = 30 + 5(-4) = 10.$$

8. **B.** Suite géométrique :

$$v_2 = v_0 \times 3^2.$$

Donc

$$45 = 9v_0 \Rightarrow v_0 = 5.$$

9. **B.** On résout

$$x^2 - 4 = 0 \iff x^2 = 4 \iff x = -2 \text{ ou } x = 2.$$

10. **B.** Le tableau de signes montre que $f(x) > 0$ uniquement entre les deux zéros -2 et 4 :

$$]-2; 4[.$$

11. C. On a

$$\frac{1}{2^{-3}} = \frac{1}{1/8} = 8.$$

Les réponses C et D sont équivalentes, mais la réponse attendue est C.

12. A. Les valeurs ordonnées sont :

13, 14, 16, 16, 17, 18, 20.

La médiane est la 4^e valeur, soit 16.

DEUXIÈME PARTIE : (14 points)

Exercice 1 – Statistiques et suites

1. Les dix valeurs sont :

12, 15, 13, 18, 16, 20, 19, 22, 21, 24.

La somme vaut :

$$12 + 15 + 13 + 18 + 16 + 20 + 19 + 22 + 21 + 24 = 180.$$

Donc la moyenne est :

$$\frac{180}{10} = 18.$$

Pour la médiane, on range les valeurs dans l'ordre croissant :

12, 13, 15, 16, 18, 19, 20, 21, 22, 24.

Comme l'effectif est pair, la médiane est la moyenne des 5^e et 6^e valeurs :

$$\frac{18 + 19}{2} = 18,5.$$

2. Le nuage de points est constitué des points :

(1; 12), (2; 15), (3; 13), (4; 18), (5; 16), (6; 20), (7; 19), (8; 22), (9; 21), (10; 24).

(Il faut les placer dans le repère demandé.)

3. On admet le modèle :

$$u_n = 1,2n + 10,4.$$

a.

$$u_1 = 1,2 \times 1 + 10,4 = 11,6, \quad u_{10} = 1,2 \times 10 + 10,4 = 22,4.$$

b. C'est une suite **arithmétique** de raison

$$r = 1,2.$$

Interprétation : le nombre de colis augmente en moyenne de 1 200 colis par semaine.

c. On cherche le plus petit entier n tel que

$$u_n > 30.$$

Donc

$$1,2n + 10,4 > 30 \iff 1,2n > 19,6 \iff n > 16,33\dots$$

Le plus petit entier est donc $n = 17$.

Le dépassement de 30 000 colis a donc lieu à partir de la **18^e semaine**.

4. On cherche quand le modèle dépasse 25 000 colis, c'est-à-dire quand

$$u_n > 25.$$

On résout :

$$1,2n + 10,4 > 25 \iff 1,2n > 14,6 \iff n > 12,16\dots$$

Le plus petit entier est $n = 13$.

Cela se produit donc à partir de la **14^e semaine**.

Exercice 2 – Étude d'une fonction

On considère

$$f(x) = -2x^2 + 20x - 32.$$

1. On calcule :

$$f(0) = -32, \quad f(2) = -2 \times 4 + 40 - 32 = 0, \quad f(8) = -2 \times 64 + 160 - 32 = 0.$$

2. Le signe de $f(0)$ est négatif. Cela signifie que, pour $x = 0$, la piscine est en **perte** de 32 euros.

3. $f(4) = 16$ et $f'(4) = 4$. En effet la tangente a une pente de 4.

Ainsi la tangente a pour équation : $y = f'(4)(x - 4) + f(4) = 4(x - 4) + 16 = 4x - 16 + 16 = 4x$.

4. Développons :

$$-2(x - 2)(x - 8) = -2(x^2 - 10x + 16) = -2x^2 + 20x - 32.$$

L'égalité est vérifiée.

5. On a donc

$$f(x) = -2(x - 2)(x - 8).$$

Les valeurs pour lesquelles le bénéfice est nul sont donc :

$$x = 2 \quad \text{ou} \quad x = 8.$$

Interprétation : l'équilibre est atteint pour 200 ou 800 baigneurs.

6. Développons :

$$18 - 2(x - 5)^2 = 18 - 2(x^2 - 10x + 25) = 18 - 2x^2 + 20x - 50 = -2x^2 + 20x - 32.$$

L'égalité est vérifiée.

7. Comme

$$f(x) = 18 - 2(x - 5)^2,$$

et que $(x - 5)^2 \geq 0$, on a

$$f(x) \leq 18.$$

Le bénéfice maximal est donc **18 euros**, atteint pour

$$x = 5.$$

Cela correspond à 500 baigneurs.

8. a.

$$f'(x) = -4x + 20.$$

Réolvons $f'(x) = 0$:

$$-4x + 20 = 0 \iff x = 5.$$

b. Sur $[0; 10]$:

$$f(0) = -32, \quad f(10) = -200 + 200 - 32 = -32.$$

La fonction f est croissante sur $[0; 5]$ puis décroissante sur $[5; 10]$.

Tableau de variations :

x	0	5	10
$f(x)$	-32	18	-32
	$\nearrow$		$\searrow$

9. Le schéma attendu est une parabole tournée vers le bas, coupant l'axe des abscisses en 2 et 8, de sommet (5; 18), et passant par (0; -32).

Exercice 3 – Probabilités

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1. a. La probabilité qu'une pièce soit conforme est

$$\frac{462}{500}.$$

b. La probabilité qu'une pièce provienne de la machine B est

$$\frac{260}{500}.$$

c. **Affirmation 1 : vraie.**

Soient N l'événement « la pièce est non conforme » et A l'événement « la pièce provient de la machine A ». On a

$$P(N \cup A) = P(N) + P(A) - P(N \cap A).$$

Donc

$$P(N \cup A) = \frac{38}{500} + \frac{240}{500} - \frac{12}{500} = \frac{266}{500}.$$

L'affirmation donnée est donc **fausse**.

d. **Affirmation 2 : vraie.**

Parmi les 38 pièces non conformes, 26 viennent de la machine B. Donc

$$P(B | N) = \frac{26}{38} \approx 0,684.$$

C'est bien supérieur à 68 %.

e. Affirmation 3 : vraie.

Taux de non-conformité de la machine A :

$$\frac{12}{240} = 0,05 = 5\%.$$

Taux de non-conformité de la machine B :

$$\frac{26}{260} = 0,10 = 10\%.$$

Le taux est donc plus élevé pour la machine B.

2. **a.** Le dé possède 6 issues équiprobables, et les multiples de 3 sont 3 et 6. Donc

$$p = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

b. Affirmation 4 : vraie.

La probabilité de ne gagner à aucun des trois lancers est

$$(1 - p)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3.$$

c. Affirmation 5 : vraie.

Gagner exactement deux fois sur trois lancers indépendants suit la formule binomiale :

$$\binom{3}{2} p^2 (1 - p) = 3p^2 (1 - p).$$

d. Affirmation 6 : vraie.

La probabilité de gagner au moins une fois est le complément de ne jamais gagner :

$$1 - \left(\frac{2}{3}\right)^3.$$