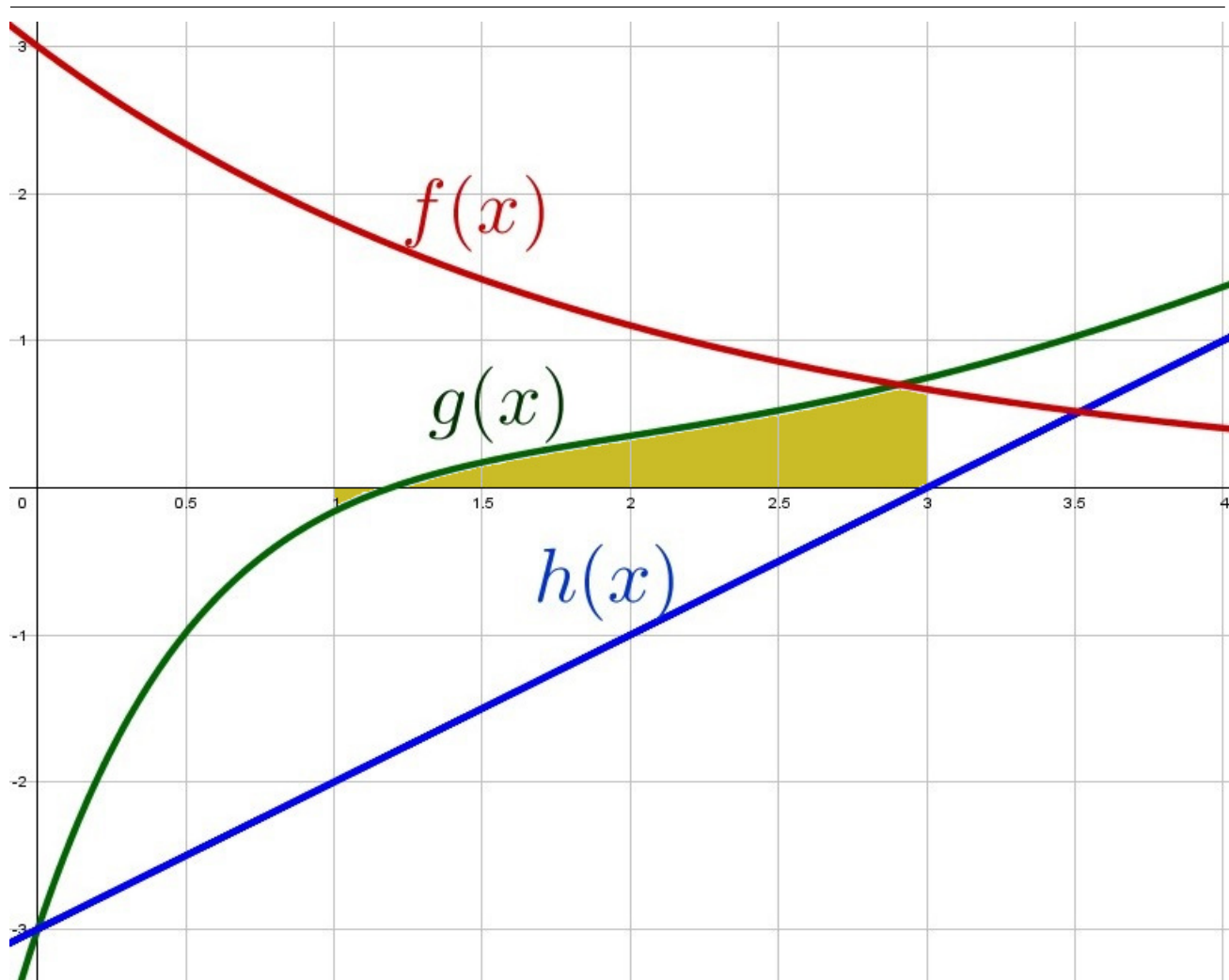


DS de Mathématiques
Durée 1 heure.

Exercice 1. (6 points)



1. Donner sans justifier un encadrement à l'entier près de $\int_0^4 f(x) dx$ à l'aide du graphique.

En comptant les carreaux : $10 < \int_0^4 f(x) dx < 11$

2. Hachurer $\int_1^3 g(x) dx$ sur le graphique.

En jaune sur le graphique.

3. Calculer $\int_0^4 h(x) dx$.

Entre 0 et 3 cette aire forme un triangle et vaut $\frac{3 \times 3}{2} = \frac{9}{2}$. L'intégrale entre 0 et 3 vaut $-\frac{9}{2}$ car la fonction y est négative.

Entre 3 et 4 l'intégrale est de $\frac{1}{2}$.

Au global cela donne : $\frac{1}{2} - \frac{9}{2} = -4$.

4. En admettant que : $\int_0^4 g(x) dx \approx 0,54$, que $\int_2^4 g(x) dx \approx 1,57$.

Donner, en expliquant votre démarche, la valeur de $\int_0^2 3g(x) - 2h(x) dx$.

$$\int_0^2 3g(x) - 2h(x) dx = 3 \int_0^2 g(x) dx - 2 \int_0^2 h(x) dx$$

$$\text{Or } \int_0^2 g(x) dx = 1,57 - 0,54 = 1,03$$

$$\text{et } \int_0^2 g(x) dx = -4$$

$$\text{Ainsi } \int_0^2 3g(x) - 2h(x) dx = 3 \times 1,03 - 2 \times (-4) = 11,09 \text{ u.a.}$$

5. Que représente ce résultat graphiquement?

Cela représente l'aire entre les courbes de $3f$ et de $2g$ entre $x = 0$ et $x = 2$.

Exercice 2. (9 points)

1. Donner l'expression de $F(x)$, la primitive de $f(x) = 3x^2 + x$ telle que $F(2) = 0$.

$$F(x) = x^3 + \frac{x^2}{2} + C. \text{ Pour avoir } F(2) = 0 \text{ il faut donc :}$$

$$2^3 + \frac{2^2}{2} + C = 0 \text{ c'est à dire } C = -10.$$

$$\text{Ainsi } F(x) = x^3 + \frac{x^2}{2} - 10$$

2. Calculer $\int_0^{10} f(x) dx$

$$\int_0^{10} f(x) dx = F(10) - F(0) = 10^3 + \frac{10^2}{2} - \left(0^3 + \frac{0^2}{2}\right) = 1050 \text{ u.a.}$$

3. Calculer la valeur moyenne de $f(x)$ entre 0 et 10.

$$\text{Elle vaut } \frac{\int_0^{10} f(x) dx}{10 - 0} = \frac{1050}{10} = 105$$

4. Donner l'expression de $G(x)$, la primitive de $g(x) = 3\sin(x) + 5\cos(x)$ telle que $G(\pi) = 0$ en radians. Pour rappel $\sin(\pi) = 0$ et $\cos(\pi) = -1$

$$G(x) = 3(-\cos(x)) + 5\sin(x) + C \Rightarrow G(x) = -3\cos(x) + 5\sin(x) + C \text{ avec } C = 3 \text{ car } G(\pi) = -3\cos(\pi) + 5\sin(\pi) + C = 3 + C \text{ qui est censé valoir zéro.}$$

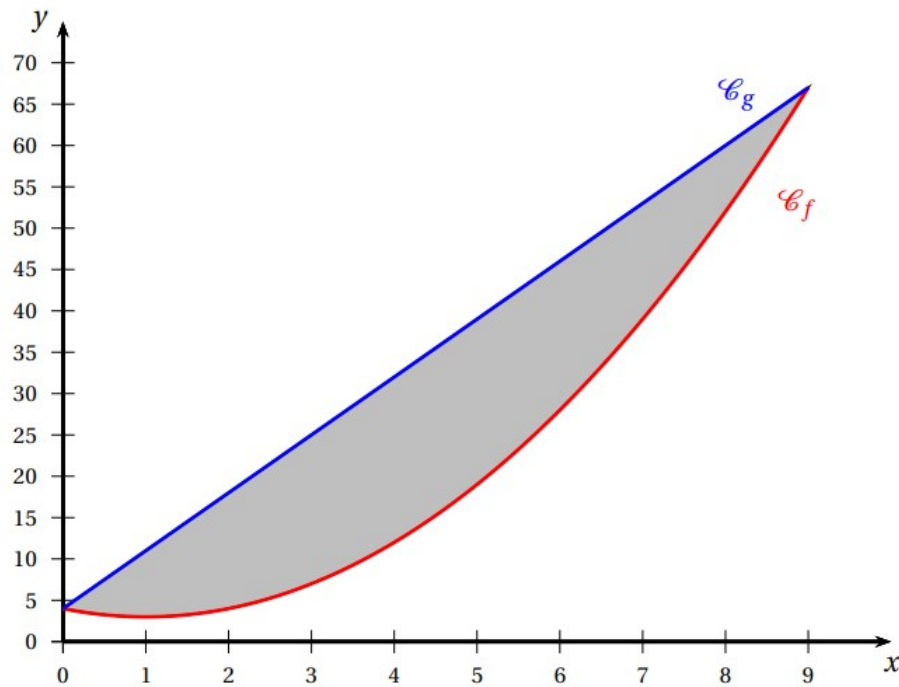
5. Donner l'expression de $h'(x)$, la dérivée de $h(x) = 5x(x^2 + 5x + 11)$.

$$h'(x) = 5x \times (x^2 + 5x + 11)' + 5 \times (x^2 + 5x + 11) \times 1 = 5(2x + 5)x + 5(x^2 + 5x + 11) = 5(2x^2 + 5x) + 5(x^2 + 5x + 11) = 10x^2 + 25x + 5x^2 + 25x + 55 = 15x^2 + 50x + 55$$

6. Donner l'expression de $H(x)$, une primitive de $h(x) = 5x(x^2 + 5x + 11)$.

$$h(x) = 5x(x^2 + 5x + 11) = 5x^3 + 25x^2 + 11x.$$

$$\text{Ainsi } H(x) = \frac{5}{4}x^4 + \frac{25}{3}x^3 + \frac{55}{2}x^2$$

Exercice 3. (4 points)

avec $f(x) = x^2 - 2x + 4$ qui représente la quantité d'énergie produite par une installation tandis que $g(x) = 7x + 4$ donne la quantité d'énergie consommée par cette même installation. x est en heures, y en kW.

Déterminer la valeur exacte de l'énergie moyenne horaire que cette installation va devoir acheter pour fonctionner.

L'énergie moyenne horaire que l'installation doit acheter correspond à la moyenne de la différence entre la consommation et la production, c'est-à-dire : $m = \frac{1}{b-a} \int_a^b (g(x) - f(x)) dx$

Pour $a = 0$ et $b = 9$,

$$m = \int_0^9 (7x + 4 - (x^2 - 2x + 4)) dx = \int_0^9 (7x + 4 - x^2 + 2x - 4) dx = \int_0^9 (-x^2 + 9x) dx$$

Calculons l'intégrale :

$$\int_0^9 (-x^2 + 9x) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{9x^2}{2} \right]_0^9 = \left(-\frac{729}{3} + \frac{729}{2} \right) - 0 = -243 + 364,5 = 121,5$$

Il reste à diviser par le nombre d'heures : $\frac{121,5}{9} = 13,5$.

Donc, l'énergie moyenne horaire achetée est de 13,5 kW par heure.