

DS de Mathématiques - Durée 1 heure.

Tout au long du devoir rédiger précisément en justifiant à chaque fois.

Corrigé

Exercice 1. (10 points)

1. Montrer que $\ln\left(\frac{x^4}{9}\right) - 3\ln(x) + \ln\left(\frac{9}{x}\right) = 0$.

$$\ln\left(\frac{x^4}{9}\right) - 3\ln(x) + \ln\left(\frac{9}{x}\right) = 4\ln(x) - \ln(9) - 3\ln(x) + \ln(9) - \ln(x) = 0.$$

2. Simplifier au maximum l'expression $2\log(5x) - \log(x+2) + \log(20) + 3\ln(10)$.

$$2\log(5x) - \log(x+2) + \log(20) = \log(25x^2) + \log(20) - \log(x+2) = \log\left(\frac{500x^2}{x+2}\right).$$

$$\text{L'expression vaut donc } \log\left(\frac{500x^2}{x+2}\right) + 3\ln(10) = \log\left(\frac{500x^2}{x+2}\right) + \ln(1000).$$

$$(\text{Avec } 3\log(10) = 3 \text{ on obtiendrait } \log\left(\frac{500\,000x^2}{x+2}\right).)$$

3. Donner la valeur exacte de la solution de l'équation $3^{-0,016x} - 2 = 0$.

$$3^{-0,016x} = 2 \iff -0,016x\ln(3) = \ln(2) \iff x = -\frac{\ln(2)}{0,016\ln(3)} = -\frac{62,5\ln(2)}{\ln(3)} \approx -39,4.$$

4. On note $f(t)$ la température (en °C) d'un café en fonction du temps t (en minute) écoulé depuis sa sortie d'une machine à expresso. On admet, pour tout $t \in [0 ; +\infty[$, l'expression suivante :

$$f(t) = 60e^{-0,08t} + 23.$$

Au bout de combien de temps la température du café sera-t-elle inférieure ou égale à 44 °C ?

$$60e^{-0,08t} + 23 \leq 44 \iff e^{-0,08t} \leq \frac{21}{60} = 0,35 \iff -0,08t \leq \ln(0,35) \iff t \geq \frac{\ln(0,35)}{-0,08} \approx 13,1.$$

Au bout d'environ 13 minutes et 7 secondes.

5. Donner, en expliquant, la valeur de la limite à l'infini de la fonction

$$g(x) = -10,8e^{-x} - 2.$$

Quand $t \rightarrow +\infty$, $-t \rightarrow -\infty$ donc $e^{-t} \rightarrow 0$: la limite est $-10,8 \times 0 - 2 = -2$.

6. Dériver la fonction $g(x) = \ln(10x^2 + 3x + 1)$.

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u} \text{ donc } g'(x) = \frac{20x + 3}{10x^2 + 3x + 1}.$$

7. Dériver la fonction $i(x) = \ln(2x - 1) \times \sin(x)$.

$$(uv)' = u'v + uv' \text{ donc } i'(x) = \frac{2}{2x - 1} \sin(x) + \ln(2x - 1) \cos(x).$$

Exercice 2. (8 points)

Lors d'un concert de musique rock organisé dans la ville de Venise, une scène flottante était placée à 120 m au large de la côte et donc des spectateurs du premier rang. Cette configuration particulière a posé des problèmes d'acoustique liés à l'atténuation différentielle du son émis par les différents instruments, notamment du fait de l'influence de la fréquence du son sur la directivité de l'émission par les haut-parleurs.

Le niveau sonore L (en dB) d'une onde sonore est relié à son intensité acoustique I (en $\text{W}\cdot\text{m}^{-2}$) par la relation :

$$L = 10 \log \frac{I}{I_0}, \text{ où } I_0 = 10^{-12} \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}.$$

On étudie mathématiquement le modèle obtenu en introduisant les fonctions f et g définies sur $[1; +\infty[$ par :

$$f(x) = 148 - 10 \ln(x) \text{ et } g(x) = 136 - 7,5 \ln(x).$$

Ces fonctions modélisent respectivement les niveaux sonores du La1 et du Fa4 en fonction de la distance x en mètres.

1. Déterminer une expression de $f'(x)$.

$$f'(x) = -10 \times \frac{1}{x} = -\frac{10}{x}.$$

2. En déduire le sens de variation de la fonction $f(x)$.

Sur $[1; +\infty[$, $x > 0$ donc $f'(x) < 0$: f est strictement décroissante.

3. Résoudre l'équation $f(x) = g(x)$ (arrondir le résultat à 10^{-1}).

$$148 - 10 \ln(x) = 136 - 7,5 \ln(x) \iff 12 = 2,5 \ln(x) \iff \ln(x) = 4,8 \iff x = e^{4,8} \approx 121,5.$$

4. En déduire la distance des enceintes à laquelle doit se trouver le public pour que les deux notes aient le même niveau sonore.

Le public doit se trouver à environ 121,5 m des enceintes, c'est-à-dire à peu près au premier rang (120 m).

5. Quel est alors le niveau sonore du son reçu par les spectateurs pour ces deux notes à cette distance?

$$f(e^{4,8}) = 148 - 10 \times 4,8 = 100 \text{ dB (et } g(e^{4,8}) = 136 - 7,5 \times 4,8 = 100 \text{ dB)}.$$

6. Ce niveau sonore correspond à quelle intensité acoustique?

$$100 = 10 \log \frac{I}{I_0} \iff \log \frac{I}{I_0} = 10 \iff I = 10^{10} \times 10^{-12} = 10^{-2} \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}.$$