DS de Mathématiques - 30 minutes

Nom Prénom :

Tout au long du devoir rédiger précisément en justifiant chaque fois.

Exercice 1	Barème	Ex 2	Barème	Ex 3	Barème
1.a. b.	/1	1.	/0,5	1.	/1
1.c.	/1	2.	/0,5	2.a.	/1
2.	/1	3.	/1	2.b. c.	/2
				3.	/1

Exercice 1. (3 points) – Tronc commun

1. Fonctions exponentielles.

a. Écrire le nombre $A = \dfrac{1,2^5 \times 1,2^3}{1,2^4}$ sous la forme $1,2^n$ où n est un entier.

$A = \dfrac{1,2^{5+3}}{1,2^4} = \dfrac{1,2^8}{1,2^4} = 1,2^{8-4} = 1,2^4$.

b. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5 \times 0,8^x$. Donner son sens de variation en justifiant.

$f(x) = k \times a^x$ avec $k = 5 > 0$ et $0 < a = 0,8 < 1$: f est **décroissante** sur $\mathbb{R}$.

c. Le prix d'un composant électronique a augmenté de 20 % en 3 ans. Déterminer le taux d'évolution annuel moyen sur ces 3 ans. On arrondira à 0,01 % près.

Le coefficient multiplicateur global est 1,2. Le coefficient multiplicateur annuel moyen est $1,2^{\frac{1}{3}} \approx 1,0627$.

Le taux d'évolution annuel moyen est donc d'environ +6,27 %.

2. Probabilités. On considère trois évènements A, B et C tels que :

$$P(A) = 0,4 ; \quad P(B) = 0,5 ; \quad P(C) = 0,3 ;$$
$$P(A \cup B) = 0,7 ; \quad P_A(C) = 0,3 \quad \text{et} \quad P_C(B) = 0,6.$$

Quels évènements sont indépendants ? Justifier.

A **et** B : $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0,4 + 0,5 - 0,7 = 0,2$ et $P(A) \times P(B) = 0,4 \times 0,5 = 0,2$.
Comme $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$, A et B sont **indépendants**.

A **et** C : $P_A(C) = 0,3 = P(C)$, donc A et C sont **indépendants**.

B **et** C : $P_C(B) = 0,6 \neq P(B) = 0,5$, donc B et C ne sont **pas indépendants**.

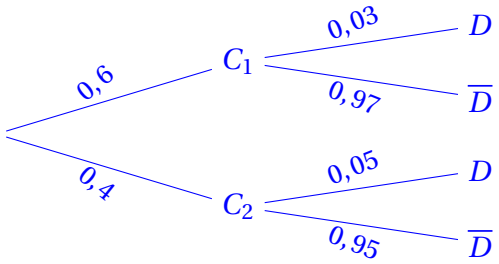
Exercice 2. (2 points) – Tronc commun

Une entreprise fabrique des capteurs de température sur deux chaînes de production C_1 et C_2.

— 60 % des capteurs sont fabriqués par la chaîne C_1, les autres par la chaîne C_2 ;
— 3 % des capteurs fabriqués par la chaîne C_1 sont défectueux ;
— 5 % des capteurs fabriqués par la chaîne C_2 sont défectueux.

On prélève un capteur au hasard dans la production. On note C_1 l'évènement « le capteur provient de la chaîne C_1 », C_2 l'évènement « le capteur provient de la chaîne C_2 » et D l'évènement « le capteur est défectueux ».

1. Construire un arbre pondéré représentant la situation.



2. Calculer la probabilité que le capteur provienne de la chaîne C_1 et soit défectueux.
$P(C_1 \cap D) = P(C_1) \times P_{C_1}(D) = 0,6 \times 0,03 = 0,018$.

3. Montrer que $P(D) = 0,038$.
D'après la formule des probabilités totales :
$P(D) = P(C_1 \cap D) + P(C_2 \cap D) = 0,018 + 0,4 \times 0,05 = 0,018 + 0,02 = 0,038$.

Exercice 3. (5 points) – Spécialité

Un réacteur contient déjà un produit chimique lorsqu'on commence à y injecter ce même produit. La concentration du produit (en mg/L) t heures après le début de l'injection est modélisée par la fonction f définie sur $[0;10]$ par :

$$f(t) = (4t+2)\,\mathrm{e}^{-0,5t}.$$

1. Calculer $f(0)$ et interpréter ce résultat dans le contexte.
$f(0) = (4 \times 0 + 2)\,\mathrm{e}^0 = 2 \times 1 = 2$. Au début de l'injection, la concentration du produit dans le réacteur est de 2 mg/L.

2. **a.** Montrer que, pour tout $t \in [0;10]$, $f'(t) = (3-2t)\,\mathrm{e}^{-0,5t}$.
$f = uv$ avec $u(t) = 4t+2$, $u'(t) = 4$, $v(t) = \mathrm{e}^{-0,5t}$, $v'(t) = -0,5\,\mathrm{e}^{-0,5t}$.
$f'(t) = u'v + uv' = 4\mathrm{e}^{-0,5t} + (4t+2) \times (-0,5)\mathrm{e}^{-0,5t} = (4-2t-1)\mathrm{e}^{-0,5t} = (3-2t)\,\mathrm{e}^{-0,5t}$.

b. Étudier le signe de $f'(t)$ puis dresser le tableau de variations de f sur $[0;10]$.
Pour tout t, $\mathrm{e}^{-0,5t} > 0$, donc $f'(t)$ a le signe de $3-2t$, qui s'annule en $t = 1,5$.

t	0		1,5		10
$f'(t)$		+	0	−	
$f(t)$	2	↗	$8\mathrm{e}^{-0,75}$	↘	$42\mathrm{e}^{-5}$

$f(1,5) = 8\,\mathrm{e}^{-0,75} \approx 3,78$ et $f(10) = 42\,\mathrm{e}^{-5} \approx 0,28$.

c. Quelle est la concentration maximale du produit ? À quel instant est-elle atteinte ?
La concentration maximale est $8\,\mathrm{e}^{-0,75} \approx 3,78$ mg/L, atteinte au bout de 1,5 h (1 h 30 min).

3. Dans un second réacteur, la concentration est donnée par $g(t) = (4t+2)\,\mathrm{e}^{1-t}$. Résoudre l'équation $f(t) = g(t)$ et interpréter le résultat.
Pour $t \in [0;10]$, $4t+2 > 0$, donc on peut diviser par $4t+2$: $f(t) = g(t) \iff \mathrm{e}^{-0,5t} = \mathrm{e}^{1-t} \iff -0,5t = 1-t \iff 0,5t = 1 \iff t = 2$.
Au bout de 2 heures, les deux réacteurs ont la même concentration : $f(2) = 10\,\mathrm{e}^{-1} \approx 3,68$ mg/L.