DS de Mathématiques - 30 minutes - Corrigé

Nom Prénom :

Tout au long du devoir rédiger précisément en justifiant chaque fois.

Question	1.	2.	3.	4.	5.	Total
Exercice 1	/1	/1	/1	/1	/1	/5
Exercice 2	/1	/1	/1	/1,5	/0,5	/5

Exercice 1. (5 points) – Tronc commun

Dans cet exercice, log désigne la fonction logarithme décimal.

1. Montrer que, pour tout réel $x > 0$, $\log\left(x^3\right) - \log(10x) + \log(100) = 2\log(x) + 1$.

On a :

$$\begin{aligned}\log\left(x^3\right) - \log(10x) + \log(100) &= 3\log(x) - \left(\log(10) + \log(x)\right) + \log\left(10^2\right)\\ &= 3\log(x) - 1 - \log(x) + 2 = 2\log(x) + 1.\end{aligned}$$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $1{,}5^x = 4$. On donnera la valeur exacte de la solution.

$$1{,}5^x = 4 \iff \log\left(1{,}5^x\right) = \log(4) \iff x\log(1{,}5) = \log(4) \iff x = \frac{\log(4)}{\log(1{,}5)}$$

car $\log(1{,}5) \neq 0$. Donc $\mathscr{S} = \left\{\dfrac{\log(4)}{\log(1{,}5)}\right\}$, avec $\dfrac{\log(4)}{\log(1{,}5)} \approx 3{,}42$.

3. Pour ne pas corroder le circuit, le liquide de refroidissement d'un moteur doit avoir un pH strictement supérieur à 7,5. Le pH est donné par $\text{pH} = -\log(c)$, où c est la concentration en ions H_3O^+ (en mol/L). Déterminer, sous forme exacte, les concentrations c pour lesquelles le liquide convient.

$\text{pH} > 7{,}5 \iff -\log(c) > 7{,}5 \iff \log(c) < -7{,}5 \iff c < 10^{-7{,}5}$, car la fonction log est strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$ et $\log\left(10^{-7{,}5}\right) = -7{,}5$.
Le liquide convient pour $0 < c < 10^{-7{,}5}$ mol/L, avec $10^{-7{,}5} \approx 3{,}16 \times 10^{-8}$.

4. La capacité d'une batterie de vélo électrique diminue de 2 % chaque année. La batterie doit être remplacée dès que sa capacité devient inférieure à 80 % de la capacité initiale.
Au bout de combien d'années la batterie devra-t-elle être remplacée ?

Diminuer de 2 % revient à multiplier par 0,98 : au bout de n années, la capacité vaut $0{,}98^n$ fois la capacité initiale. On résout donc $0{,}98^n < 0{,}8$ avec n entier naturel :

$$0{,}98^n < 0{,}8 \iff n\log(0{,}98) < \log(0{,}8) \iff n > \frac{\log(0{,}8)}{\log(0{,}98)}$$

(on change le sens car $\log(0{,}98) < 0$). Or $\dfrac{\log(0{,}8)}{\log(0{,}98)} \approx 11{,}04$, donc $n \geqslant 12$. La batterie devra être remplacée au bout de 12 ans.

5. Dans un atelier, le niveau sonore L (en dB) d'une machine est donné par $L = 10\log\left(\dfrac{I}{I_0}\right)$, où I est l'intensité acoustique (en W/m^2) et $I_0 = 10^{-12}$ W/m^2.
Montrer que si l'intensité acoustique est multipliée par 100, le niveau sonore augmente de 20 dB.

Le nouveau niveau sonore est :

$$L' = 10\log\left(\frac{100I}{I_0}\right) = 10\left(\log(100) + \log\left(\frac{I}{I_0}\right)\right) = 10\times 2 + 10\log\left(\frac{I}{I_0}\right) = L + 20.$$

Le niveau sonore augmente donc de 20 dB.

Exercice 2. (5 points) – Spécialité

Partie A – Calculs

1. Montrer que, pour tout réel $x > 0$, $\ln\left(x^3\mathrm{e}^2\right) - 2\ln\left(x\sqrt{\mathrm{e}}\right) = \ln(x) + 1$.

$$\begin{aligned}\ln\left(x^3\mathrm{e}^2\right) - 2\ln\left(x\sqrt{\mathrm{e}}\right) &= \ln\left(x^3\right) + \ln\left(\mathrm{e}^2\right) - 2\left(\ln(x) + \ln\left(\sqrt{\mathrm{e}}\right)\right)\\ &= 3\ln(x) + 2 - 2\ln(x) - 2\times\tfrac{1}{2} = \ln(x) + 1.\end{aligned}$$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $4\mathrm{e}^{-0,5x} + 1 < 3$. On donnera l'ensemble des solutions sous forme exacte.

La fonction ln étant strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$:

$$4\mathrm{e}^{-0,5x} + 1 < 3 \iff \mathrm{e}^{-0,5x} < \frac{1}{2} \iff -0,5x < \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2) \iff x > \frac{-\ln(2)}{-0,5} = 2\ln(2)$$

(on change le sens en divisant par $-0,5 < 0$). $\mathscr{S} =]2\ln(2)\,;\,+\infty[$, avec $2\ln(2) \approx 1,39$.

Partie B – Consommation d'un moteur

L'énergie consommée par un moteur électrique pour réaliser un cycle de travail dépend de sa vitesse de rotation. On la modélise par la fonction E définie sur $[0,5\,;\,10]$ par $E(x) = x^2 - x + 2 - 3\ln(x)$, où x est la vitesse de rotation (en milliers de tours par minute) et $E(x)$ l'énergie consommée (en kJ).

3. Montrer que, pour tout $x \in [0,5\,;\,10]$, $E'(x) = \dfrac{(x+1)(2x-3)}{x}$.

$E'(x) = 2x - 1 - \dfrac{3}{x} = \dfrac{2x^2 - x - 3}{x}$. Or $(x+1)(2x-3) = 2x^2 - 3x + 2x - 3 = 2x^2 - x - 3$, donc $E'(x) = \dfrac{(x+1)(2x-3)}{x}$.

4. Dresser, en justifiant, le tableau de variations de E sur $[0,5\,;\,10]$.

Sur $[0,5\,;\,10]$, $x > 0$ et $x + 1 > 0$: $E'(x)$ a le signe de $2x - 3$, qui s'annule en $x = 1,5$, est négatif avant et positif après.

x	0,5		1,5		10
$E'(x)$		$-$	0	$+$	
$E(x)$	$1,75 + 3\ln(2)$	↘	$2,75 - 3\ln(1,5)$	↗	$92 - 3\ln(10)$

$E(0,5) = 0,25 - 0,5 + 2 - 3\ln(0,5) = 1,75 + 3\ln(2) \approx 3,83$; $E(1,5) = 2,75 - 3\ln(1,5) \approx 1,53$; $E(10) = 92 - 3\ln(10) \approx 85,09$.

5. Montrer que E admet un minimum sur $[0,5\,;\,10]$, dont on donnera la valeur exacte, puis interpréter le résultat.

D'après le tableau, E admet un minimum en $x = 1,5$, égal à $E(1,5) = 2,75 - 3\ln(1,5) \approx 1,53$.
L'énergie consommée par cycle est minimale, environ 1,53 kJ, pour une vitesse de rotation de 1 500 tours par minute.