DS de Mathématiques - 30 minutes

Nom Prénom :

Tout au long du devoir rédiger précisément en justifiant chaque fois.

Question	1.	2.	3.	4.	5.	Total
Exercice 1	/1	/1	/1	/1	/1	/5
Exercice 2	/1	/1	/1	/1,5	/0,5	/5

Exercice 1. (5 points) – Tronc commun

Dans cet exercice, log désigne la fonction logarithme décimal.

1. Montrer que, pour tout réel $x > 0$, $\log\left(x^3\right) - \log(10x) + \log(100) = 2\log(x) + 1$.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $1,5^x = 4$. On donnera la valeur exacte de la solution.

3. Pour ne pas corroder le circuit, le liquide de refroidissement d'un moteur doit avoir un pH strictement supérieur à 7,5. Le pH est donné par $\text{pH} = -\log(c)$, où c est la concentration en ions H_3O^+ (en mol/L). Déterminer, sous forme exacte, les concentrations c pour lesquelles le liquide convient.

4. La capacité d'une batterie de vélo électrique diminue de 2 % chaque année. La batterie doit être remplacée dès que sa capacité devient inférieure à 80 % de la capacité initiale.
Au bout de combien d'années la batterie devra-t-elle être remplacée ?

5. Dans un atelier, le niveau sonore L (en dB) d'une machine est donné par $L = 10\log\left(\dfrac{I}{I_0}\right)$, où I est l'intensité acoustique (en W/m^2) et $I_0 = 10^{-12}\ \text{W/m}^2$.
Montrer que si l'intensité acoustique est multipliée par 100, le niveau sonore augmente de 20 dB.

Exercice 2. (5 points) – Spécialité

Partie A – Calculs

1. Montrer que, pour tout réel $x > 0$, $\ln\left(x^3 \mathrm{e}^2\right) - 2\ln\left(x\sqrt{\mathrm{e}}\right) = \ln(x) + 1$.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $4\mathrm{e}^{-0{,}5x} + 1 < 3$. On donnera l'ensemble des solutions sous forme exacte.

Partie B – Consommation d'un moteur

L'énergie consommée par un moteur électrique pour réaliser un cycle de travail dépend de sa vitesse de rotation. On la modélise par la fonction E définie sur $[0{,}5\ ;\ 10]$ par $E(x) = x^2 - x + 2 - 3\ln(x)$, où x est la vitesse de rotation (en milliers de tours par minute) et $E(x)$ l'énergie consommée (en kJ).

3. Montrer que, pour tout $x \in [0{,}5\ ;\ 10]$, $E'(x) = \dfrac{(x+1)(2x-3)}{x}$.

4. Dresser, en justifiant, le tableau de variations de E sur $[0{,}5\ ;\ 10]$.

5. Montrer que E admet un minimum sur $[0{,}5\ ;\ 10]$, dont on donnera la valeur exacte, puis interpréter le résultat.