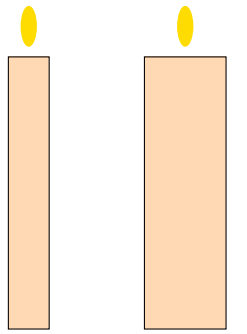
Fonctions affines
Problème de recherche : les deux bougies

Deux bougies neuves ont exactement la même hauteur. La bougie fine se consume entièrement en 4 heures, la bougie épaisse en 5 heures. Chacune se consume de façon régulière.
Pour une fête, on les allume en même temps. On voudrait qu'à 16 h précises, l'une des bougies soit exactement deux fois plus haute que l'autre.



fine
4 h

épaisse
5 h

La mission

1. À quelle heure faut-il allumer les deux bougies ?
2. Avec deux autres bougies de même hauteur, qui se consument en a heures et en b heures ($a < b$) : l'une sera-t-elle toujours, à un moment, deux fois plus haute que l'autre ? Si oui, au bout de combien de temps ?

Pour aller plus loin

Au bout de combien de temps la bougie épaisse est-elle trois fois plus haute que la fine ? Est-ce toujours possible, quelles que soient les durées a et b ?

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

1. L'heure d'allumage

On prend la hauteur initiale comme unité et on note t le temps (en heures) depuis l'allumage, pour $0 \leqslant t \leqslant 4$. Chaque bougie perd la même hauteur chaque heure :

$$h_1(t) = 1 - \frac{t}{4} \quad \text{(fine)} \qquad \text{et} \qquad h_2(t) = 1 - \frac{t}{5} \quad \text{(épaisse)}.$$

Ce sont deux fonctions affines décroissantes ; la fine diminue plus vite, donc c'est l'épaisse qui doit être la plus haute : $h_2(t) = 2h_1(t)$.

$$1 - \frac{t}{5} = 2 - \frac{t}{2} \iff \frac{t}{2} - \frac{t}{5} = 1 \iff \frac{3t}{10} = 1 \iff t = \frac{10}{3}.$$

$\frac{10}{3}$ h = 3 h 20 min. Il faut donc allumer les bougies à **12 h 40**. À 16 h, la fine mesure $\frac{1}{6}$ et l'épaisse $\frac{1}{3}$ de la hauteur initiale.

2. Le cas général

$h_1(t) = 1 - \frac{t}{a}$ et $h_2(t) = 1 - \frac{t}{b}$ pour $0 \leqslant t \leqslant a$.

$$1 - \frac{t}{b} = 2 - \frac{2t}{a} \iff t\left(\frac{2}{a} - \frac{1}{b}\right) = 1 \iff t = \frac{ab}{2b-a}.$$

Comme $a < b$, on a $2b - a > b > 0$, donc $t > 0$. De plus $t \leqslant a \iff b \leqslant 2b - a \iff a \leqslant b$: c'est vrai. Ce moment existe donc **toujours**, au bout de $\frac{ab}{2b-a}$ heures (avec $a = 4$, $b = 5$: $\frac{20}{6} = \frac{10}{3}$).

Pour aller plus loin

$h_2(t) = 3h_1(t) \iff 1 - \frac{t}{b} = 3 - \frac{3t}{a} \iff t\left(\frac{3}{a} - \frac{1}{b}\right) = 2 \iff t = \frac{2ab}{3b-a}$. Avec $a = 4$ et $b = 5$: $t = \frac{40}{11} \approx 3{,}64$ h, soit environ 3 h 38 min. Dans le cas général, $t \leqslant a \iff 2b \leqslant 3b - a \iff a \leqslant b$: c'est encore toujours possible. En fait, juste avant que la fine ne s'éteigne, sa hauteur tend vers 0 alors que l'épaisse est encore haute : le rapport des hauteurs dépasse n'importe quelle valeur.

Ce qu'on a utilisé du chapitre

- Modéliser une situation par une fonction affine.
- Coefficient directeur et sens de variation ; résolution d'une équation du premier degré.