Application de la dérivation
Problème de recherche : la canette idéale

Un fabricant de boissons veut produire des canettes cylindriques de 33 cL (330 cm^3). Pour réduire ses coûts et son impact environnemental, il souhaite utiliser le moins d'aluminium possible : l'aire totale de la canette (fond, couvercle et paroi) doit être minimale.
On rappelle qu'un cylindre de rayon r et de hauteur h a pour volume $\pi r^2 h$ et que sa paroi latérale a pour aire $2\pi r h$.

La mission

1. Quelles dimensions (rayon et hauteur) faut-il choisir ? Quelle est la particularité de la canette obtenue ?
2. Mesurer une vraie canette de 33 cL. Les fabricants ont-ils choisi les dimensions idéales ? Proposer des explications.

Pour aller plus loin

En réalité, le fond et le couvercle sont deux fois plus épais que la paroi (ils doivent résister à la pression). Quelles sont alors les dimensions qui minimisent la quantité de métal ?

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

Modéliser

$\pi r^2 h = 330$ donne $h = \frac{330}{\pi r^2}$. L'aire totale est alors

$$S(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r^2 + \frac{660}{r}, \qquad r > 0.$$

1. Minimiser

$S'(r) = 4\pi r - \frac{660}{r^2} = \frac{4\pi r^3 - 660}{r^2}$. Le signe de $S'(r)$ est celui de $4\pi r^3 - 660$: négatif pour $r < r_0$, positif pour $r > r_0$, où $r_0^3 = \frac{660}{4\pi} = \frac{165}{\pi}$.

r	0		r_0		$+\infty$
$S'(r)$	‖	$-$	0	$+$	
S	‖	↘	≈ 264	↗	

$r_0 = \sqrt[3]{165/\pi} \approx 3{,}74$ cm, et $h = \frac{330}{\pi r_0^2} \approx 7{,}49$ cm, soit $h = 2r_0$ exactement (car $\pi r_0^3 = 165$ donne $h = \frac{330}{\pi r_0^2} = \frac{2\pi r_0^3}{\pi r_0^2} = 2r_0$).

La canette idéale a une hauteur égale à son diamètre (environ 7,5 cm) : elle « tient dans un carré » vue de profil. Aire minimale : environ 264 cm^2.

2. Les vraies canettes

Une canette standard mesure environ 6,6 cm de diamètre et 11,5 cm de hauteur : elle est plus haute et plus fine que la canette idéale (aire $\approx 2\pi \times 3{,}3^2 + \frac{660}{3{,}3} \approx 268$ cm^2, à peine plus). Explications possibles : prise en main, rangement dans les distributeurs, fond et couvercle plus épais (voir ci-dessous), image de marque.

Pour aller plus loin

On minimise $M(r) = 2 \times 2\pi r^2 + \frac{660}{r}$: $M'(r) = 8\pi r - \frac{660}{r^2} = 0$ pour $r^3 = \frac{165}{2\pi}$, $r \approx 2{,}97$ cm et $h = \frac{330}{\pi r^2} = 4r \approx 11{,}9$ cm : **très proche des vraies canettes**!

Ce qu'on a utilisé du chapitre

- Exprimer une grandeur en fonction d'une variable ; dériver une somme et la fonction inverse.
- Étudier le signe de la dérivée, dresser un tableau de variations, déterminer un minimum.