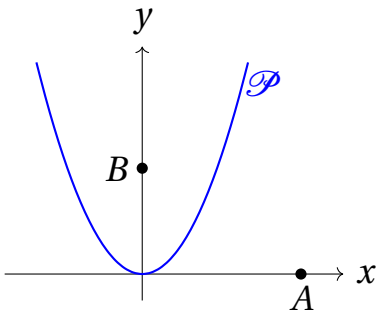
Application de la dérivation
Problème de recherche : le plus court chemin jusqu'au canal

Dans un repère orthonormé (unité : 100 m), un canal suit la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y = x^2$. On veut relier une maison au canal par le chemin le plus court possible, en ligne droite.



La mission

1. La maison est au point $A(3\,;0)$. Quel est le point du canal le plus proche de la maison ? Quelle est la longueur du chemin ?
2. Une autre maison est au point $B(0\,;2)$, à l'intérieur de la courbe. Quels sont les points du canal les plus proches ? Le point $(0\,;0)$, juste en dessous de la maison, en fait-il partie ?

Pour aller plus loin

Pour la maison A, calculer le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{P}$ au point trouvé, et celui de la droite qui joint ce point à A. Que remarque-t-on ? (On pourra le vérifier avec GeoGebra.)

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

1. Depuis $A(3;0)$

Pour $M(x;x^2)$: $AM^2 = (x-3)^2 + x^4$. La distance est minimale quand son carré l'est. On étudie $d(x) = x^4 + x^2 - 6x + 9$ sur $\mathbb{R}$:

$$d'(x) = 4x^3 + 2x - 6 = 2(2x^3 + x - 3).$$

1 est racine évidente : $2x^3 + x - 3 = (x-1)(2x^2+2x+3)$ (on vérifie en développant). Le trinôme $2x^2+2x+3$ a pour discriminant $4 - 24 < 0$: il est toujours positif. Donc $d'(x)$ a le signe de $x-1$: d est décroissante sur $]-\infty;1]$ et croissante sur $[1;+\infty[$. Le minimum est atteint en $x = 1$: $d(1) = 1 + 1 - 6 + 9 = 5$.

Le point le plus proche est $\boldsymbol{M(1;1)}$, et le chemin mesure $\sqrt{5} \approx 2{,}24$ unités, soit environ **224 m**.

2. Depuis $B(0;2)$

$BM^2 = x^2 + (x^2-2)^2 = x^4 - 3x^2 + 4 = g(x)$ et $g'(x) = 4x^3 - 6x = 2x(2x^2-3)$, qui s'annule en 0 et en $\pm\sqrt{1{,}5}$.

x	$-\infty$		$-\sqrt{1{,}5}$		0		$\sqrt{1{,}5}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
g		$\searrow$	$1{,}75$	$\nearrow$	4	$\searrow$	$1{,}75$	$\nearrow$	

Le minimum, 1,75, est atteint en deux points : $\left(\boldsymbol{\pm\sqrt{1{,}5};1{,}5}\right)$, à la distance $\sqrt{1{,}75} \approx 1{,}32$ (environ 132 m). Le point $(0;0)$ est à la distance 2 : c'est un **maximum local**, pas le point le plus proche.

Pour aller plus loin

En $x = 1$, la tangente a pour coefficient directeur $2 \times 1 = 2$. La droite (AM) a pour coefficient directeur $\frac{1-0}{1-3} = -\frac{1}{2}$. Le produit vaut -1 : GeoGebra montre que le plus court chemin est **perpendiculaire à la tangente**. On pourra le démontrer avec le produit scalaire (chapitre suivant).

Ce qu'on a utilisé du chapitre

- Étudier les variations d'une fonction à l'aide du signe de sa dérivée.
- Déterminer un extremum ; factorisation et signe d'un trinôme.