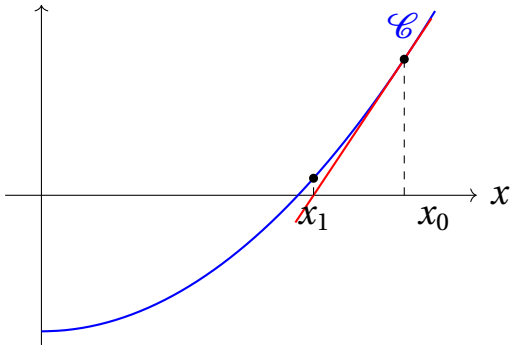
Dérivation
Problème de recherche : la course aux décimales

On veut calculer une valeur approchée de $\sqrt{2}$, solution positive de l'équation $x^2 - 2 = 0$, en utilisant des tangentes.
On note $f(x) = x^2 - 2$ et $\mathscr{C}$ sa courbe. On part de $x_0 = 2$, puis on répète l'étape suivante :

> *on trace la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse x_0 ; elle coupe l'axe des abscisses en un point d'abscisse x_1 ; on recommence à partir de x_1, et ainsi de suite.*



La mission

1. Exprimer le nombre obtenu à partir d'un nombre a (avec $a > 0$) à l'aide d'une formule simple.
2. Au tableur, calculer les premiers nombres obtenus. Combien d'étapes faut-il pour obtenir $\sqrt{2}$ avec 10 décimales exactes ? Comment évolue le nombre de décimales exactes ?
3. Appliquer la même méthode à l'équation $x^3 - x - 1 = 0$ en partant de 1. Donner une valeur approchée de la solution à 10^{-8} près.

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

1. La formule

$f'(x) = 2x$. La tangente au point d'abscisse a a pour équation $y = 2a(x-a) + a^2 - 2$. Elle coupe l'axe des abscisses quand $y = 0$:

$$2a(x-a) = 2 - a^2 \iff x = a + \frac{2-a^2}{2a} = \frac{a^2+2}{2a} = \frac{1}{2}\left(a + \frac{2}{a}\right).$$

(Comme $a > 0$, $f'(a) \neq 0$: la tangente n'est pas horizontale et le point existe.)

2. Au tableur

étape	valeur	décimales exactes
0	2	0
1	1,5	0
2	1,416 666 666 666 67	2
3	1,414 215 686 274 51	5
4	1,414 213 562 374 69	11
5	1,414 213 562 373 10	au moins 15

Il suffit de **4 étapes** pour 10 décimales exactes ($\sqrt{2} \approx 1{,}414\,213\,562\,373\,095$). À partir de la deuxième étape, le nombre de décimales exactes **double environ** à chaque étape.

Enrichissement historique : la formule $\frac{1}{2}\left(a + \frac{2}{a}\right)$ est connue depuis l'Antiquité (méthode dite de Héron d'Alexandrie, Ier siècle) ; la méthode générale par les tangentes porte le nom de Newton (XVIIe siècle).

3. Avec $x^3 - x - 1$

Pour $g(x) = x^3 - x - 1$, $g'(x) = 3x^2 - 1$ et le nombre suivant est $a - \frac{g(a)}{g'(a)} = a - \frac{a^3-a-1}{3a^2-1}$. En partant de 1 : 1,5 ; 1,347 826 ; 1,325 200 ; 1,324 718 2 ; 1,324 717 957 2 ; 1,324 717 957 2. La solution vaut environ **1,324 717 96** (à 10^{-8} près). Ce nombre, parfois appelé « nombre plastique », vérifie $x^3 = x + 1$.

Ce qu'on a utilisé du chapitre

- Équation de la tangente en un point.
- Fonction dérivée d'un polynôme (x^2, x^3).