Équations cartésiennes
Problème de recherche : le point d'équilibre du triangle

Dans un triangle, une **médiane** est une droite qui passe par un sommet et par le milieu du côté opposé. Un triangle a donc trois médianes.

La mission

1. Avec GeoGebra, construire un triangle quelconque et ses trois médianes. Que peut-on conjecturer ? Mesurer aussi, sur chaque médiane, la distance du sommet au point remarquable et la longueur de la médiane : que remarque-t-on ?
2. Dans un repère, on considère $A(-2;1)$, $B(4;-1)$ et $C(1;6)$. Démontrer la conjecture dans ce triangle à l'aide d'équations cartésiennes.
3. Comparer les coordonnées du point obtenu avec celles des trois sommets. Énoncer une conjecture générale.

Pour aller plus loin

Démontrer, pour un triangle quelconque $A(x_A;y_A)$, $B(x_B;y_B)$, $C(x_C;y_C)$, que le point G dont les coordonnées sont les moyennes de celles des trois sommets appartient à la médiane issue de A (on pourra utiliser un déterminant). Pourquoi cela suffit-il ?

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

1. Conjecture

Les trois médianes semblent toujours **concourantes**, en un point G situé aux deux tiers de chaque médiane en partant du sommet.

2. Démonstration dans le triangle donné

Milieux : $I\left(\frac{5}{2};\frac{5}{2}\right)$ de $[BC]$, $J\left(-\frac{1}{2};\frac{7}{2}\right)$ de $[AC]$, $K(1;0)$ de $[AB]$.

- (AI) : $\overrightarrow{AI}\left(\frac{9}{2};\frac{3}{2}\right)$, donc $\vec{u}(3;1)$ dirige (AI). Une équation est $1\times x-3y+c=0$; avec A : $-2-3+c=0$, $c=5$. (AI) : $x-3y+5=0$.
- (BJ) : $\overrightarrow{BJ}\left(-\frac{9}{2};\frac{9}{2}\right)$, donc $\vec{v}(-1;1)$ dirige (BJ). Équation $x+y+c'=0$; avec B : $c'=-3$. (BJ) : $x+y-3=0$.
- Intersection : $x=3-y$, donc $3-y-3y+5=0$, $y=2$ et $x=1$: $G(1;2)$.
- (CK) : C et K ont la même abscisse 1, donc (CK) : $x=1$, et G en fait partie.

Les trois médianes sont concourantes en $G(1;2)$. De plus $\overrightarrow{AG}(3;1)=\frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$: G est aux deux tiers de $[AI]$ (de même pour les autres).

3. Les coordonnées de G

$\frac{-2+4+1}{3}=1$ et $\frac{1-1+6}{3}=2$: les coordonnées de G sont les **moyennes** de celles des sommets. On appelle ce point le **centre de gravité** du triangle : une plaque triangulaire homogène tient en équilibre sur une pointe placée en G (enrichissement : ce résultat de physique est admis ici).

Pour aller plus loin

On pose $G\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3};\frac{y_A+y_B+y_C}{3}\right)$ et I milieu de $[BC]$. Alors

$$\overrightarrow{AG}\left(\frac{x_B+x_C-2x_A}{3};\frac{y_B+y_C-2y_A}{3}\right) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AI}\left(\frac{x_B+x_C-2x_A}{2};\frac{y_B+y_C-2y_A}{2}\right).$$

Le déterminant vaut $\frac{1}{6}(XY-YX)=0$ en notant $X=x_B+x_C-2x_A$ et $Y=y_B+y_C-2y_A$: les vecteurs sont colinéaires, donc $G\in(AI)$, et même $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$. La formule de G est symétrique en A, B, C : le même calcul montre que G est sur les deux autres médianes.

Ce qu'on a utilisé du chapitre

- Déterminer une équation cartésienne à partir d'un point et d'un vecteur directeur.
- Intersection de deux droites ; déterminant et colinéarité.