Fonction exponentielle
Problème de recherche : le lait dans le café

Léo se sert un café à 90 °C dans une pièce à 20 °C. Il veut le boire dans 10 minutes, avec un peu de lait froid, et le plus chaud possible.

— Sans lait, la température du café (en °C) après t minutes est $T(t) = 20 + 70\,\mathrm{e}^{-0{,}1t}$.

— Plus généralement, un café à la température T_0 au départ a, après t minutes, la température $20 + (T_0 - 20)\,\mathrm{e}^{-0{,}1t}$.

— Quand on verse le lait (à 5 °C), la température du mélange devient $0{,}9\,T + 0{,}5$, où T est la température du café juste avant.

La mission

Léo a deux possibilités : verser le lait tout de suite, puis attendre 10 minutes ; ou attendre 10 minutes, puis verser le lait. Laquelle choisir ? Quel est l'écart de température entre les deux méthodes ?

Pour aller plus loin

Le résultat dépend-il du temps d'attente ? Montrer que, quel que soit le temps d'attente $t > 0$, une méthode est toujours meilleure, et donner l'écart en fonction de t.

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

Méthode 1 : lait tout de suite

Juste après le lait : $0{,}9 \times 90 + 0{,}5 = 81{,}5$ °C. Après 10 minutes :

$$T_1 = 20 + 61{,}5\,\mathrm{e}^{-1} \approx 42{,}62 \text{ °C}.$$

Méthode 2 : lait à la fin

Après 10 minutes sans lait : $T(10) = 20 + 70\,\mathrm{e}^{-1} \approx 45{,}75$ °C. Avec le lait :

$$T_2 = 0{,}9\left(20 + 70\,\mathrm{e}^{-1}\right) + 0{,}5 = 18{,}5 + 63\,\mathrm{e}^{-1} \approx 41{,}68 \text{ °C}.$$

Conclusion

$T_1 - T_2 = 20 + 61{,}5\,\mathrm{e}^{-1} - 18{,}5 - 63\,\mathrm{e}^{-1} = 1{,}5\left(1 - \mathrm{e}^{-1}\right) \approx 0{,}95$ °C.

Il vaut mieux verser le lait tout de suite : le café sera environ 1 °C plus chaud.

Explication physique : un café refroidit d'autant plus vite qu'il est plus chaud par rapport à la pièce. En le refroidissant tout de suite avec le lait, on ralentit son refroidissement pendant l'attente.

Pour aller plus loin

Avec un temps t : $T_1 = 20 + 61{,}5\,\mathrm{e}^{-0{,}1t}$ et $T_2 = 0{,}9\left(20 + 70\,\mathrm{e}^{-0{,}1t}\right) + 0{,}5 = 18{,}5 + 63\,\mathrm{e}^{-0{,}1t}$.

Donc

$$T_1 - T_2 = 1{,}5 - 1{,}5\,\mathrm{e}^{-0{,}1t} = 1{,}5\left(1 - \mathrm{e}^{-0{,}1t}\right).$$

Pour $t > 0$, $\mathrm{e}^{-0{,}1t} < 1$: l'écart est toujours positif. Il augmente avec t et se rapproche de 1,5 °C.

Ce qu'on a utilisé du chapitre

- Fonctions $t \mapsto \mathrm{e}^{-kt}$: calculs, propriétés algébriques, sens de variation.
- Comparer deux expressions ; étudier le signe d'une différence.

Pour aller plus loin (enrichissement)

Le modèle utilisé est la *loi de refroidissement de Newton* ; il découle d'une équation différentielle étudiée en Terminale.