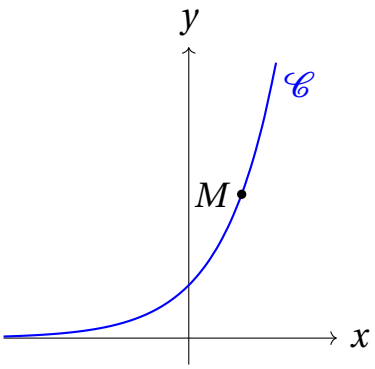
Fonction exponentielle
Problème de recherche : les tangentes de l'exponentielle

On note $\mathscr{C}$ la courbe de la fonction exponentielle dans un repère orthonormé.



La mission

1. Montrer que la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse a coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse $a-1$. En déduire une construction de cette tangente à la règle, dès qu'on a placé le point de la courbe.
2. Quelle tangente à $\mathscr{C}$ passe par l'origine du repère ? Par le point $(2;0)$?
3. Montrer qu'aucune tangente à $\mathscr{C}$ ne passe par le point $(0;2)$, et qu'une seule passe par le point $(0;1)$.

Pour aller plus loin

Pour la courbe de la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{kx}$ (avec $k \neq 0$), où la tangente au point d'abscisse a coupe-t-elle l'axe des abscisses ?

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

1. Une construction simple

$\exp' = \exp$, donc la tangente au point d'abscisse a a pour équation

$$y = \mathrm{e}^a(x-a) + \mathrm{e}^a = \mathrm{e}^a(x-a+1).$$

Comme $\mathrm{e}^a \neq 0$, $y = 0 \iff x = a-1$. La tangente coupe l'axe des abscisses au point $(a-1\,;0)$.

Construction : on place le point $M(a\,;\mathrm{e}^a)$ de la courbe, le point $(a-1\,;0)$ situé une unité à gauche du pied de M sur l'axe, et on trace la droite qui les joint.

2. Deux tangentes particulières

Par l'origine : il faut $a-1=0$, soit $a=1$: c'est la tangente $y = \mathrm{e}\,x$, au point $(1\,;\mathrm{e})$.

Par $(2\,;0)$: $a-1=2$, soit $a=3$: la tangente $y = \mathrm{e}^3(x-2)$.

3. Les points de l'axe des ordonnées

La tangente au point d'abscisse a coupe l'axe des ordonnées en $y = \mathrm{e}^a(1-a)$. On pose $g(a) = \mathrm{e}^a(1-a)$. Alors

$$g'(a) = \mathrm{e}^a(1-a) + \mathrm{e}^a \times (-1) = -a\,\mathrm{e}^a,$$

du signe de $-a$: g est croissante sur $]-\infty\,;0]$ et décroissante sur $[0\,;+\infty[$. Son maximum est $g(0) = 1$.

- Pour tout a, $g(a) \leqslant 1 < 2$: **aucune tangente** ne passe par $(0\,;2)$.
- $g(a) = 1$ seulement pour $a = 0$ (ailleurs $g(a) < 1$) : **une seule tangente**, $y = x+1$, passe par $(0\,;1)$; c'est la tangente au point $(0\,;1)$ lui-même.

Géométriquement, la courbe est « au-dessus » de toutes ses tangentes : depuis un point situé au-dessus de la courbe, on ne peut pas tracer de tangente.

Pour aller plus loin

La dérivée de $x \mapsto \mathrm{e}^{kx}$ est $x \mapsto k\mathrm{e}^{kx}$. Tangente : $y = \mathrm{e}^{ka}\,(k(x-a)+1)$, nulle pour $x = a - \frac{1}{k}$.

Ce qu'on a utilisé du chapitre

- Dérivée de la fonction exponentielle et de $x \mapsto \mathrm{e}^{kx}$.
- Étudier une fonction comportant une exponentielle ; équation de tangente.