Probabilités conditionnelles
Problème de recherche : les trois portes

Dans un jeu télévisé, une voiture est cachée derrière l'une de trois portes, au hasard ; les deux autres portes cachent une chèvre.

— Le candidat choisit une porte, sans l'ouvrir.
— Le présentateur, qui sait où est la voiture, ouvre alors une des deux autres portes, derrière laquelle se trouve une chèvre. S'il a le choix entre deux portes, il choisit au hasard.
— Il propose au candidat de garder sa porte ou de changer pour l'autre porte restée fermée.

La mission

1. Écrire un programme (Python ou tableur) qui simule un grand nombre de parties avec chacune des deux stratégies : « garder » et « changer ». Que conjecture-t-on ?

2. Le candidat a choisi la porte 1 et le présentateur a ouvert la porte 3. Calculer la probabilité de gagner en changeant. Conclure.

3. Variante : un présentateur distrait ouvre au hasard une des deux portes que le candidat n'a pas choisies ; il se trouve qu'elle cache une chèvre. Le candidat a-t-il encore intérêt à changer ?

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

1. Simulation

```
from random import randint
def partie(changer):
    voiture = randint(1, 3); choix = 1
    if changer:
        return voiture != choix   # on gagne si le premier choix etait faux
    return voiture == choix
n = 10000
print(sum(partie(False) for _ in range(n)) / n)   # environ 0.33
print(sum(partie(True) for _ in range(n)) / n)    # environ 0.67
```

On conjecture que changer de porte fait gagner environ **deux fois sur trois**. (En changeant, on obtient la seule porte fermée restante, qui cache la voiture dès que le premier choix était faux.)

2. Le calcul

On note V_i « la voiture est derrière la porte i » et O_3 « le présentateur ouvre la porte 3 ». $P(V_1) = P(V_2) = P(V_3) = \frac{1}{3}$ et

$$P_{V_1}(O_3) = \frac{1}{2} \text{ (il a le choix)}, \quad P_{V_2}(O_3) = 1 \text{ (obligé)}, \quad P_{V_3}(O_3) = 0.$$

$P(O_3) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times 1 + 0 = \frac{1}{2}$, donc $P_{O_3}(V_2) = \frac{1/3}{1/2} = \frac{2}{3}$ et $P_{O_3}(V_1) = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3}$.
En changeant (pour la porte 2), on gagne avec probabilité $\frac{2}{3}$: il faut **changer**.

3. Le présentateur distrait

On note C « la porte 3 ouverte cache une chèvre ». Il ouvre la porte 3 avec probabilité $\frac{1}{2}$ quelle que soit la voiture. $P(O_3 \cap C) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times 0 = \frac{1}{3}$, et $P(V_2 \cap O_3 \cap C) = \frac{1}{6} = P(V_1 \cap O_3 \cap C)$. Sachant ce qu'on a vu, V_1 et V_2 ont chacune la probabilité $\frac{1/6}{1/3} = \frac{1}{2}$: changer **ne sert plus à rien**. L'information apportée par le présentateur dépend de ce qu'il sait !

Enrichissement : ce problème, inspiré d'un jeu télévisé américain, a été popularisé en 1990 par la chroniqueuse Marilyn vos Savant ; de nombreux lecteurs, dont des mathématiciens, avaient contesté sa réponse (changer), qui était pourtant juste.

Ce qu'on a utilisé du chapitre

— Arbre pondéré et formule des probabilités totales.
— Probabilité conditionnelle ; simulation pour conjecturer.