Produit scalaire
Problème de recherche : des angles parfaits

La mission

1. Un triangle a des côtés de longueurs 3 cm, 5 cm et 7 cm. Déterminer la mesure exacte de son plus grand angle.
2. Un triangle a des côtés de longueurs 5, 7 et 8. L'un de ses angles a une mesure remarquable : lequel ? En déduire l'aire exacte de ce triangle.
3. Trouver un autre triangle, non équilatéral, dont les côtés sont des nombres entiers et qui possède un angle de 60°.

Pour aller plus loin

On suppose que a, b, c sont les côtés d'un triangle ayant un angle de 120° en face du côté c.

1. Montrer que a, $a+b$ et c sont les côtés d'un triangle ayant un angle de 60° en face du côté c.
2. En déduire, à partir du triangle 3, 5, 7, deux triangles à côtés entiers ayant un angle de 60°.
3. Le triangle de côtés 7, 8 et 13 a-t-il un angle de 120° ? En déduire de nouveaux triangles ayant un angle de 60°.

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

1. Le triangle 3, 5, 7

Le plus grand angle $\hat{C}$ est en face du plus grand côté. Formule d'Al-Kashi : $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{C}$.

$$49 = 9 + 25 - 2 \times 3 \times 5\cos\hat{C} \iff 30\cos\hat{C} = -15 \iff \cos\hat{C} = -\frac{1}{2}.$$

Le plus grand angle mesure **120°** (soit $\frac{2\pi}{3}$).

2. Le triangle 5, 7, 8

En face du côté 7 : $49 = 25 + 64 - 2 \times 5 \times 8\cos\alpha \iff 80\cos\alpha = 40 \iff \cos\alpha = \frac{1}{2}$: cet angle mesure **60°**.

Aire : $\mathscr{A} = \frac{1}{2} \times 5 \times 8 \times \sin 60° = 20 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \mathbf{10\sqrt{3}}$.

3. Un autre triangle

Un angle de 60° en face de c donne $c^2 = a^2 + b^2 - ab$. Avec $a = 3$: $b = 8$ donne $9 + 64 - 24 = 49 = 7^2$. Le triangle de côtés **3, 7, 8** convient (d'autres : 7, 13, 15 ou 8, 13, 15).

Pour aller plus loin

1. Avec 120° en face de c : $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \times \left(-\frac{1}{2}\right) = a^2 + ab + b^2$. Pour a, $a+b$, c :

$$a^2 + (a+b)^2 - a(a+b) = a^2 + a^2 + 2ab + b^2 - a^2 - ab = a^2 + ab + b^2 = c^2.$$

D'après la formule d'Al-Kashi, l'angle en face de c a un cosinus égal à $\frac{1}{2}$: il mesure 60°. (Les trois longueurs forment bien un triangle, puisqu'on vient de montrer que c^2 est compris entre $(a+b-a)^2$ et $(a+a+b)^2$.)

2. Le triangle 3, 5, 7 a un angle de 120° en face de 7. Avec $a = 3$, $b = 5$: triangle 3, 8, 7. Avec $a = 5$, $b = 3$: triangle 5, 8, 7. On retrouve les triangles des questions 2 et 3.

3. $49 + 64 + 56 = 169 = 13^2$: oui. On en déduit les triangles 7, 15, 13 et 8, 15, 13.

Ce qu'on a utilisé du chapitre

— Formule d'Al-Kashi.
— Valeurs remarquables du cosinus (chapitre de trigonométrie).