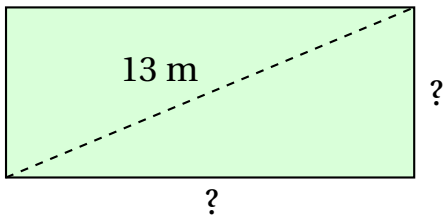
Second degré
Problème de recherche : le terrain de 34 mètres

Un géomètre a mesuré un terrain rectangulaire, mais il a égaré ses notes. Il se souvient seulement que :

— le périmètre du terrain est de 34 m ;
— la diagonale du terrain mesure 13 m.



La mission

1. Retrouver les dimensions du terrain.
2. Un autre terrain rectangulaire a aussi un périmètre de 34 m. Sa diagonale peut-elle mesurer 12 m ? Quelles sont toutes les longueurs possibles pour la diagonale d'un rectangle de périmètre 34 m ?

Pour aller plus loin

Un rectangle a une aire de 60 m^2 et une diagonale de 13 m. Quelles sont ses dimensions ?

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

1. Les dimensions

Notons x et y les dimensions (en m). Le périmètre donne $2(x+y)=34$, donc $x+y=17$. Le théorème de Pythagore donne $x^2+y^2=169$.
Or $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$, donc $289=169+2xy$ et $xy=60$.
Les nombres x et y ont pour somme 17 et pour produit 60. En remplaçant y par $17-x$: $x(17-x)=60 \iff x^2-17x+60=0$.
$\Delta=289-240=49$, d'où $x=\frac{17-7}{2}=5$ ou $x=\frac{17+7}{2}=12$. Le terrain mesure **5 m sur 12 m** (et on vérifie : $5^2+12^2=169=13^2$).

2. Les diagonales possibles

Avec une diagonale d : $x+y=17$ et $x^2+y^2=d^2$, donc $xy=\frac{289-d^2}{2}$ et x est solution de

$$x^2-17x+\frac{289-d^2}{2}=0, \qquad \Delta=289-2(289-d^2)=2d^2-289.$$

- Pour $d=12$: $\Delta=288-289=-1<0$: **aucun rectangle** ne convient.
- Il faut $\Delta \geqslant 0$, soit $d^2 \geqslant 144{,}5$, c'est-à-dire $d \geqslant \sqrt{144{,}5} \approx 12{,}02$ m. Le cas $d=\sqrt{144{,}5}$ correspond au carré de côté 8,5 m.
- Il faut aussi deux dimensions strictement positives : leur somme 17 est positive, il suffit que leur produit soit positif, soit $289-d^2>0$, c'est-à-dire $d<17$.

La diagonale d'un rectangle de périmètre 34 m peut prendre toutes les valeurs de l'intervalle $\left[\sqrt{144{,}5}\,;17\right[$. Le carré a la plus petite diagonale.

Pour aller plus loin

$xy=60$ et $x^2+y^2=169$ donnent $(x+y)^2=169+120=289$, donc $x+y=17$ (une longueur est positive) : on retrouve le même système et le rectangle de **5 m sur 12 m**.

Ce qu'on a utilisé du chapitre

- Résoudre une équation du second degré à l'aide du discriminant.
- Somme et produit des solutions ; discussion selon le signe du discriminant.