Expérimentations et simulation
Problème de recherche : compléter l'album

Un jeu de cartes à collectionner propose une série de 10 cartes différentes. Chaque paquet acheté contient une seule carte, choisie au hasard parmi les 10, toutes ayant la même probabilité. Un paquet coûte 2 €.

La mission

1. Écrire un programme Python qui simule l'achat de paquets jusqu'à obtenir les 10 cartes, et qui renvoie le nombre de paquets achetés.
2. En répétant la simulation un grand nombre de fois, estimer le nombre moyen de paquets nécessaires pour compléter la collection. Quel budget prévoir ?
3. Pourquoi faut-il beaucoup plus que 10 paquets ? Quelles sont les cartes les plus « longues » à obtenir ?

Pour aller plus loin

Deux amis collectionnent ensemble et s'échangent leurs doubles : ils veulent compléter deux albums. Ont-ils besoin, en moyenne, de deux fois plus de paquets qu'un collectionneur seul ?

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

1. Simulation

```
from random import randint

def collection(n=10):
    obtenues = []
    paquets = 0
    while len(obtenues) < n:
        carte = randint(1, n)
        paquets = paquets + 1
        if carte not in obtenues:
            obtenues.append(carte)
    return paquets

def moyenne(N):
    return sum(collection() for k in range(N)) / N

print(moyenne(100000))   # environ 29,3
```

2. Estimation

Sur 100 000 simulations, on obtient une moyenne d'environ **29,3 paquets**, soit un budget moyen d'environ **59 €**.

3. Explication

Quand on a déjà k cartes, un nouveau paquet donne une nouvelle carte avec la probabilité $\frac{10-k}{10}$. Pour la dernière carte, cette probabilité n'est que $\frac{1}{10}$: il faut en moyenne 10 paquets rien que pour elle. Les dernières cartes sont les plus longues à obtenir.

En additionnant les attentes moyennes de chaque étape :

$$\frac{10}{10}+\frac{10}{9}+\frac{10}{8}+\cdots+\frac{10}{1}=10\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{10}\right)\approx 29{,}29.$$

(Enrichissement : ce calcul exact s'appuie sur la loi géométrique, vue en Terminale ; c'est le *problème du collectionneur de vignettes*.)

Pour aller plus loin

En adaptant le programme (on arrête quand chaque carte a été obtenue au moins deux fois), on trouve environ 46 paquets en moyenne : bien moins que $2 \times 29{,}3 \approx 59$. Collectionner à plusieurs est avantageux.

Ce qu'on a utilisé du chapitre

- Simuler une expérience aléatoire en Python ; listes, boucle `while`.
- Estimer une espérance par la moyenne d'un grand nombre de simulations.