Expérimentations et simulation
Problème de recherche : le paradoxe des anniversaires

On suppose que les 365 jours de l'année ont tous la même probabilité d'être le jour d'anniversaire d'une personne (on ignore le 29 février), et que les anniversaires de personnes différentes sont indépendants.

La mission

1. Dans une classe de 30 élèves, quelle est la probabilité qu'au moins deux élèves aient le même jour d'anniversaire ?
2. Combien faut-il de personnes pour que cette probabilité dépasse $\frac{1}{2}$? pour qu'elle dépasse 99 % ?
3. Écrire un programme qui simule 1 000 classes de 30 élèves et compte celles où deux élèves ont le même anniversaire. Le résultat est-il cohérent avec la question 1 ?
4. Dans une classe de 23 élèves, Inès se demande si un autre élève a le même anniversaire qu'elle. Quelle est la probabilité que ce soit le cas ? Pourquoi est-ce si différent de la question 2 ?

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

1. Dans une classe de 30

Événement contraire $\overline{A}$: « les 30 dates sont toutes différentes ». La 2e personne doit éviter 1 date, la 3e 2 dates, etc. :

$$P(\overline{A}) = \frac{365}{365} \times \frac{364}{365} \times \cdots \times \frac{336}{365} \approx 0{,}294.$$

Donc $P(A) \approx$ **0,706** : il y a environ 7 chances sur 10 que deux élèves aient le même anniversaire.

2. Les seuils

```
p, n = 1, 0                  # p : proba que les n dates soient differentes
while 1 - p <= 0.5:
    p = p * (365 - n) / 365
    n = n + 1
print(n)                     # 23
```

Pour 22 personnes, $P(A) \approx 0{,}476$; pour **23 personnes**, $P(A) \approx 0{,}507 > \frac{1}{2}$. Avec 0,99 dans la boucle, on obtient **57 personnes** ($P(A) \approx 0{,}990$).

3. Simulation

```
from random import randint
def doublon(n):
    dates = [randint(1, 365) for _ in range(n)]
    return len(set(dates)) < n    # True si deux dates sont egales
print(sum(doublon(30) for _ in range(1000)) / 1000)
```

On obtient des fréquences proches de 0,7, qui fluctuent d'une simulation à l'autre (par exemple 0,69 ; 0,72 ; 0,71) : c'est cohérent.

4. Le même anniversaire qu'Inès

Chacun des 22 autres élèves a un anniversaire différent de celui d'Inès avec probabilité $\frac{364}{365}$, indépendamment. La probabilité qu'au moins un ait le même jour qu'elle est $1 - \left(\frac{364}{365}\right)^{22} \approx$ **0,059**, soit environ 6 %. À la question 2, n'importe quelle paire d'élèves convient : avec 23 élèves, il y a $\frac{23\times22}{2} = 253$ paires possibles, ce qui multiplie les occasions de coïncidence.

Ce qu'on a utilisé du chapitre

- Simuler une expérience aléatoire avec Python ; fluctuation des fréquences.
- Événement contraire et indépendance (chapitre de probabilités).