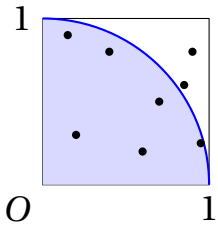
Expérimentations et simulation
Problème de recherche : pi au hasard

On choisit au hasard un point $M(x;y)$ dans le carré $[0;1] \times [0;1]$: en Python, `x = random()` et `y = random()`. On regarde s'il tombe dans le quart de disque de centre O et de rayon 1.



La mission

1. Quelle est la probabilité p que M soit dans le quart de disque ? En déduire une méthode pour estimer π avec n points.
2. Écrire une fonction Python `estimation(n)` qui renvoie une estimation de π obtenue avec n points. La tester plusieurs fois avec $n = 100$, puis $n = 10\,000$.
3. Simuler 200 estimations avec $n = 100$, puis avec $n = 400$ et $n = 1\,600$. Pour chaque valeur de n, calculer la moyenne et l'écart type des 200 estimations. Que remarque-t-on ?
4. Combien de points faudrait-il, environ, pour obtenir le plus souvent les deux premières décimales de π exactes ?

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

1. La méthode

Le point est uniformément réparti dans le carré d'aire 1 : la probabilité qu'il soit dans le quart de disque est le rapport des aires, $p = \frac{\pi \times 1^2}{4} = \frac{\pi}{4} \approx 0{,}785$. Avec n points, la fréquence f des points dans le quart de disque est proche de p, donc $4f$ est une estimation de π.

2. Programme

```
from random import random
from statistics import mean, pstdev
def estimation(n):
    dedans = 0
    for _ in range(n):
        x, y = random(), random()
        if x**2 + y**2 <= 1:
            dedans = dedans + 1
    return 4 * dedans / n
for n in [100, 400, 1600]:
    L = [estimation(n) for _ in range(200)]
    print(n, mean(L), pstdev(L))
```

Avec $n = 100$, on obtient des valeurs très dispersées (3,0 ; 3,28 ; 3,16…) ; avec $n = 10\,000$, des valeurs comme 3,139 ou 3,147.

3. Écart type des estimations

Les moyennes sont toutes proches de 3,14. Les écarts types obtenus sont d'environ **0,16** pour $n = 100$, **0,08** pour $n = 400$ et **0,04** pour $n = 1\,600$: quand on multiplie n par 4, l'écart type est divisé par 2. Il est proportionnel à $\frac{1}{\sqrt{n}}$; ici il vaut environ $\frac{1{,}64}{\sqrt{n}}$ (car $4\sqrt{p(1-p)} \approx 1{,}64$, enrichissement). Environ 95 % des estimations sont à moins de deux écarts types de π.

4. Deux décimales exactes

Pour obtenir 3,14 le plus souvent, il faut une erreur de l'ordre de 0,005 au plus : on veut $\frac{1{,}64}{\sqrt{n}} \approx 0{,}005$, d'où $\sqrt{n} \approx 330$ et $n \approx$ **100 000 points**. Pour une décimale de plus, il faudrait 100 fois plus de points : la méthode est lente.

Enrichissement historique : dès 1777, Buffon proposait d'estimer π à l'aide du hasard, en lançant une aiguille sur un parquet.

Ce qu'on a utilisé du chapitre

- Simuler une expérience aléatoire avec Python ; fluctuation d'échantillonnage.
- Écart type d'une série de moyennes et proportion d'échantillons proches de l'espérance.