Notion de suites
Problème de recherche : le cercle de Josèphe

n élèves sont debout en cercle, numérotés de 1 à n dans le sens des aiguilles d'une montre. L'élève 1 dit « reste », l'élève 2 dit « assis » et s'assoit, l'élève 3 dit « reste », l'élève 4 dit « assis » et s'assoit, et ainsi de suite. On continue à tourner autour du cercle, en sautant les élèves déjà assis, jusqu'à ce qu'il ne reste qu'un seul élève debout. On note J_n son numéro.
Par exemple, avec 5 élèves : 2 et 4 s'assoient, puis 1 (car 5 a dit « reste »), puis 5. Donc $J_5 = 3$.
Ce jeu est une version du *problème de Josèphe*, du nom de l'historien Flavius Josèphe (Ier siècle), à qui l'on attribue un récit de ce type.

La mission

1. Dans une classe de 35 élèves, quelle place faut-il choisir pour rester le dernier debout ?
2. Trouver une formule donnant J_n pour n'importe quelle valeur de n.

Pour aller plus loin

Comparer J_{2n} et J_n, puis J_{2n+1} et J_n. Justifier.

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

1. Premières valeurs

Avec des jetons (ou un programme) :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
J_n	1	1	3	1	3	5	7	1	3	5	7	9	11	13	15	1

$J_n = 1$ quand n est une puissance de 2 (1, 2, 4, 8, 16) ; ensuite, J_n augmente de 2 à chaque élève ajouté, jusqu'à la puissance de 2 suivante.

2. Formule

Cas d'une puissance de 2. Avec 2^k élèves, un tour complet fait asseoir tous les numéros pairs : il reste 2^{k-1} élèves, et c'est de nouveau l'élève 1 qui parle en premier. On recommence jusqu'à ce qu'il n'en reste qu'un : l'élève 1. Donc $J_{2^k} = 1$.

Cas général. On écrit $n = 2^k + m$, où 2^k est la plus grande puissance de 2 inférieure ou égale à n (donc $0 \leqslant m < 2^k$). Quand les m élèves numérotés $2, 4, \ldots, 2m$ se sont assis, il reste exactement 2^k élèves debout, et c'est à l'élève $2m+1$ de parler. D'après le cas précédent, c'est lui qui reste le dernier :

$$J_n = 2m + 1 = 2\left(n - 2^k\right) + 1.$$

Pour $n = 35 = 32 + 3$: $J_{35} = 2 \times 3 + 1 = \mathbf{7}$. Il faut se placer en 7e position.

Un programme Python qui simule le cercle (une liste dont on retire un élément sur deux) confirme la formule, par exemple $J_{100} = 2 \times (100 - 64) + 1 = 73$.

Pour aller plus loin

Avec $2n$ élèves, le premier tour fait asseoir tous les pairs. Il reste n élèves $1, 3, 5, \ldots, 2n-1$, et l'élève 1 recommence : c'est le jeu à n élèves, où l'élève de rang i porte le numéro $2i - 1$. Donc $J_{2n} = 2J_n - 1$.

Avec $2n + 1$ élèves, après le premier tour (les pairs s'assoient), l'élève $2n + 1$ dit « reste » et l'élève 1 s'assoit. Il reste n élèves $3, 5, \ldots, 2n + 1$, et l'élève 3 commence : l'élève de rang i porte le numéro $2i + 1$. Donc $J_{2n+1} = 2J_n + 1$.

Ce qu'on a utilisé du chapitre

- Calcul de termes d'une suite, conjecture d'une formule explicite à partir des premiers termes.
- Relation entre des termes d'une suite (ici entre J_{2n}, J_{2n+1} et J_n).

Pour aller plus loin (enrichissement)

En base 2, J_n s'obtient en déplaçant le premier chiffre de n à la fin : 35 s'écrit 100011, et 000111 vaut 7. Le problème se généralise en faisant asseoir un élève sur k ; il n'existe alors plus de formule aussi simple, mais une relation de récurrence permet encore le calcul.