Notion de suites
Problème de recherche : le vol des nombres de Syracuse

On choisit un entier $n \geqslant 1$ et on définit la suite (u_k) par $u_0 = n$ et, pour tout entier k :

$$u_{k+1} = \begin{cases} \dfrac{u_k}{2} & \text{si } u_k \text{ est pair,} \\ 3u_k + 1 & \text{si } u_k \text{ est impair.} \end{cases}$$

Par exemple, en partant de $n = 6$: $6 \to 3 \to 10 \to 5 \to 16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1 \to 4 \to 2 \to 1 \ldots$

On appelle **durée du vol** de n le nombre d'étapes nécessaires pour atteindre 1 pour la première fois (8 pour $n = 6$), et **altitude maximale** la plus grande valeur atteinte (16 pour $n = 6$).

La mission

1. Calculer à la main la durée du vol et l'altitude maximale de 7. La suite est-elle monotone ?
2. Écrire un programme Python qui calcule la durée du vol et l'altitude maximale d'un entier n. Que donne-t-il pour $n = 27$?
3. Quel entier compris entre 1 et 100 a le vol le plus long ?
4. Démontrer que si u_k est une puissance de 2, alors la suite atteint 1. Trouver tous les entiers n dont la durée du vol vaut 5.

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !