Notion de suites
Problème de recherche : le vol des nombres de Syracuse

On choisit un entier $n \geqslant 1$ et on définit la suite (u_k) par $u_0 = n$ et, pour tout entier k :

$$u_{k+1} = \begin{cases} \dfrac{u_k}{2} & \text{si } u_k \text{ est pair,} \\ 3u_k + 1 & \text{si } u_k \text{ est impair.} \end{cases}$$

Par exemple, en partant de $n = 6$: $6 \to 3 \to 10 \to 5 \to 16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1 \to 4 \to 2 \to 1 \ldots$

On appelle **durée du vol** de n le nombre d'étapes nécessaires pour atteindre 1 pour la première fois (8 pour $n = 6$), et **altitude maximale** la plus grande valeur atteinte (16 pour $n = 6$).

La mission

1. Calculer à la main la durée du vol et l'altitude maximale de 7. La suite est-elle monotone ?
2. Écrire un programme Python qui calcule la durée du vol et l'altitude maximale d'un entier n. Que donne-t-il pour $n = 27$?
3. Quel entier compris entre 1 et 100 a le vol le plus long ?
4. Démontrer que si u_k est une puissance de 2, alors la suite atteint 1. Trouver tous les entiers n dont la durée du vol vaut 5.

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

1. Le vol de 7

$7 \to 22 \to 11 \to 34 \to 17 \to 52 \to 26 \to 13 \to 40 \to 20 \to 10 \to 5 \to 16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1$: durée **16**, altitude maximale **52**. La suite n'est pas monotone : elle monte et descend sans régularité apparente.

2. Programme

```
def suivant(n):
    if n % 2 == 0:
        return n // 2
    return 3 * n + 1
def vol(n):
    duree, alt = 0, n
    while n != 1:
        n = suivant(n)
        duree = duree + 1
        alt = max(alt, n)
    return duree, alt
print(vol(27))    # (111, 9232)
```

Partant de 27, il faut **111 étapes**, et la suite monte jusqu'à **9 232** avant de redescendre.

3. Le record jusqu'à 100

Une boucle sur n de 1 à 100 donne le record pour $n = \mathbf{97}$, avec 118 étapes (altitude maximale 9 232).

4. Puissances de 2 et vols de durée 5

Si $u_k = 2^p$, les termes suivants sont $2^{p-1}, 2^{p-2}, \ldots$ (tous pairs sauf $2^0 = 1$) : la suite atteint 1 en p étapes.

On remonte depuis 1 : le prédécesseur d'un terme m est toujours $2m$, et aussi $\frac{m-1}{3}$ si ce nombre est un entier impair (supérieur à 1). Pas à pas, en partant de 1 : {2}, {4}, {8}, {16}, puis {32 ; 5}. Les entiers dont la durée du vol vaut 5 sont donc **5 et 32** (on vérifie : $5 \to 16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1$). On a écarté le prédécesseur 1 de 4, car le vol s'arrête au premier passage par 1.

Enrichissement : on ne sait toujours pas démontrer que la suite atteint 1 quel que soit n. Cette question, connue sous le nom de conjecture de Syracuse ou de Collatz (années 1930), a été vérifiée par ordinateur pour des nombres immenses, mais reste un problème ouvert.

Ce qu'on a utilisé du chapitre

- Suite définie par une relation de récurrence ; calcul de termes.
- Programmer le calcul des termes et un seuil avec une boucle `while`.