Suites arithmétiques et géométriques
Problème de recherche : deux offres d'emploi

Après ses études, Inès reçoit deux offres d'emploi d'ingénieure :

— **Entreprise A** : salaire de 30 000 € la première année, puis augmentation de 1 500 € chaque année ;

— **Entreprise B** : salaire de 28 000 € la première année, puis augmentation de 6 % chaque année.

La mission

1. À partir de quelle année le salaire annuel proposé par B dépasse-t-il celui proposé par A ?
2. Inès pense rester une dizaine d'années dans l'entreprise. Quelle offre lui conseiller ? Justifier en comparant les sommes totales gagnées.

Pour aller plus loin

L'entreprise A veut rester compétitive sur 10 ans. Quelle augmentation annuelle fixe devrait-elle proposer pour qu'Inès gagne autant au total sur 10 ans qu'avec l'offre B ?

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

Modéliser

On note a_n et b_n les salaires de l'année $n+1$ (année 1 : $n=0$).

— (a_n) est arithmétique de raison 1 500 : $a_n = 30\,000 + 1\,500n$;

— (b_n) est géométrique de raison 1,06 : $b_n = 28\,000 \times 1{,}06^n$.

1. Salaires annuels

Au tableur : $a_5 = 37\,500$ et $b_5 \approx 37\,470$; $a_6 = 39\,000$ et $b_6 \approx 39\,719$. **Le salaire de B dépasse celui de A à partir de la 7e année** ($n = 6$), et l'écart ne cesse ensuite de grandir.

2. Sommes totales

Sur les N premières années :

$$S_A = \frac{N(a_0 + a_{N-1})}{2}, \qquad S_B = \frac{b_N - b_0}{1{,}06 - 1} = \frac{28\,000 \times 1{,}06^N - 28\,000}{0{,}06}.$$

Années	9	10	15
Total A	324 000 €	367 500 €	607 500 €
Total B	≈ 321 757 €	≈ 369 062 €	≈ 651 727 €

B ne rattrape son retard en total qu'à partir de la **10e année**. Sur une dizaine d'années, les deux offres se valent presque ; si Inès reste plus longtemps, B est nettement meilleure ; si elle part avant 10 ans, A est meilleure.

Pour aller plus loin

On cherche r tel que $\frac{10(30\,000+30\,000+9r)}{2} = 369\,062$, soit $300\,000 + 45r = 369\,062$, $r \approx 1\,535$ € par an.

Ce qu'on a utilisé du chapitre

— Suites arithmétiques et géométriques : terme général.

— Sommes de termes consécutifs ; comparer deux suites (tableur, algorithme de seuil).

Pour aller plus loin (enrichissement)

En Terminale, on montre qu'une suite géométrique de raison $q > 1$ finit toujours par dépasser n'importe quelle suite arithmétique : c'est une « croissance exponentielle ».