Suites arithmétiques et géométriques
Problème de recherche : le remboursement du prêt

Une famille emprunte 150 000 € à une banque, au taux de 3 % par an. Chaque année :

— le capital restant dû augmente de 3 % (ce sont les intérêts) ;

— puis la famille rembourse une somme fixe R, la même chaque année.

On note C_n le capital restant dû après n années, avec $C_0 = 150\,000$. Le prêt est remboursé quand le capital restant dû est nul.

La mission

1. À l'aide d'un tableur, trouver, à l'euro près, le remboursement annuel R qui permet de rembourser le prêt en exactement 20 ans.

2. Démontrer que, pour tout entier n, $C_n = 1{,}03^n \times C_0 - R \times \dfrac{1{,}03^n - 1}{0{,}03}$. En déduire la valeur exacte de R, puis le coût total du crédit (somme des intérêts payés).

3. La famille peut rembourser 12 000 € par an. En combien d'années le prêt est-il remboursé (la dernière année, le remboursement est plus petit) ?

Pour aller plus loin

Pourquoi la suite (C_n) n'est-elle ni arithmétique ni géométrique ? Avec quel remboursement R le capital restant dû reste-t-il constant ?

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

1. Au tableur

En B2 : `=B1*1,03-$E$1`, recopié vers le bas, avec R en E1. En ajustant E1, on trouve $C_{20} \approx 0$ pour $R \approx$ **10 082 €**.

2. La formule

On a $C_{n+1} = 1{,}03\,C_n - R$. Donc $C_1 = 1{,}03\,C_0 - R$, $C_2 = 1{,}03^2 C_0 - R(1+1{,}03)$, $C_3 = 1{,}03^3 C_0 - R(1+1{,}03+1{,}03^2)$, et de proche en proche

$$C_n = 1{,}03^n C_0 - R\left(1+1{,}03+\cdots+1{,}03^{n-1}\right).$$

La somme entre parenthèses est celle des termes u_0 à u_{n-1} de la suite géométrique $u_k = 1{,}03^k$; elle vaut $\frac{u_n-u_0}{q-1} = \frac{1{,}03^n-1}{0{,}03}$, d'où la formule.

$C_{20} = 0 \iff R = \frac{0{,}03\times 1{,}03^{20}\times 150\,000}{1{,}03^{20}-1} \approx 10\,082{,}36$ €. La famille rembourse en tout $20 \times 10\,082{,}36 \approx 201\,647$ € : le crédit coûte environ **51 647 €** d'intérêts.

3. Avec 12 000 € par an

Le tableur (ou la formule) donne $C_{15} \approx 10\,508$ € > 0 et $C_{16} < 0$: le prêt est remboursé **au bout de 16 ans**, avec une dernière année de remboursement d'environ $1{,}03 \times 10\,508 \approx 10\,824$ €. Les intérêts payés tombent alors à environ 40 800 €.

Pour aller plus loin

$C_1 - C_0 = 4\,500 - R$ mais $C_2 - C_1 = 1{,}03(C_1 - C_0)$: les écarts ne sont pas constants (si $R \neq 4\,500$) ; et $\frac{C_{n+1}}{C_n} = 1{,}03 - \frac{R}{C_n}$ n'est pas constant non plus. Si $R = 4\,500$ € (exactement les intérêts de la première année), $C_n = 150\,000$ pour tout n : on ne rembourse jamais le capital.

Ce qu'on a utilisé du chapitre

- Suite géométrique ; somme de termes consécutifs.
- Modéliser une situation ; calcul de termes au tableur.